Wprowadzenie

W projektowaniu kratownic nieodzowne jest wyznaczenie sił normalnych. Wykorzystywane są one do projektowania wymiarów przekrojów poprzecznych prętów (przez zastosowanie warunku wytrzymałości). W układach statycznie niewyznaczalnych nie dysponujemy wystarczającą liczbą równań równowagi do wyznaczenia sił w prętach, a w przypadku układów zewnętrznie statycznie niewyznaczalnych również reakcji podporowych. Jedną z metod rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych (układów o nadliczbowych więzach) jest metoda przemieszczeń. W przypadku kratownic rozwiązywanych metodą przemieszczeń niewiadomymi są przemieszczenia węzłów, a równania, z których są one wyznaczane, są równaniami równowagi. Metoda przemieszczeń jest szczególnie efektywna wówczas, gdy ilość niewiadomych geometrycznych (przesunięć węzłów) nie przekracza stopnia statycznej niewyznaczalności. Sposób rozwiązywania kratownicy metodą przemieszczeń jest następujący:

- Określenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności kratownicy n_g.

W przypadku kratownicy korzystamy ze wzoru

$$n_g = w$$

gdzie:

w - liczba niezbędnych więzów do wprowadzenia w rozpatrywanym układzie, w celu uniemożliwienia wystąpienia przesuwu któregokolwiek węzła kratownicy.

- Utworzenie układu podstawowego.

W rozwiązywanym układzie wprowadzamy n_g nadliczbowych więzów, tworząc w ten sposób układ podstawowy geometrycznie wyznaczalny. W układzie geometrycznie wyznaczalnym przesuwy węzłów są równe zeru.

- Obciążenie układu podstawowego.

Układ podstawowy będzie równoważny rzeczywistemu układowi wówczas, gdy poza obciążeniem zewnętrznym działającym na układ, w miejscach wprowadzonych nadliczbowych więzów uwzględnimy występujące tam przesuwy $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_i, ...$ $..\Delta_{n_g-1}, \Delta_{n_g}$.

- Wyznaczenie współczynników przy niewiadomych (reakcje nadliczbowych węzłów) i wyrazów wolnych układu równań metody przemieszczeń.

Układ podstawowy będzie pod względem statycznym równoważny rozpatrywanemu układowi geometrycznie niewyznaczalnemu, jeżeli pod wpływem obciążenia zewnętrznego oraz niewiadomych nadliczbowych $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_i, ...\Delta_{n_g-1}, \Delta_{n_g}$ siły w układzie podstawowym w miejscach wprowadzonych n_g więzów będą równe zeru. Przyjmijmy założenie, że rozpatrywana konstrukcja wykonana jest z materiału liniowo-sprężystego. Korzystając z zasady superpozycji otrzymamy układ n_g równań z n_g niewiadomymi.

Omawiany układ równań przedstawiony jest w zapisie macierzowym.

$$
\begin{bmatrix}
r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1i} & \cdots & r_{1n_g-1} & r_{1n_g} \\
r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2i} & \cdots & r_{2n_g-1} & r_{2n_g} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ii} & \cdots & r_{in_g-1} & r_{in_g} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
r_{n_g-11} & r_{n_g-12} & \cdots & r_{n_g-1i} & \cdots & r_{n_g-1n_g-1} & r_{n_g-1n_g} \\
r_{n_g1} & r_{n_g2} & \cdots & r_{n_gi} & \cdots & r_{n_gn_g-1} & r_{n_gn_g}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \cdots \\ \Delta_i \\ \cdots \\ \Delta_{n_g-1} \\ \Delta_{n_g} \end{Bmatrix}
+
\begin{Bmatrix} r_{10} \\ r_{20} \\ \cdots \\ r_{i0} \\ \cdots \\ r_{n_g-10} \\ r_{n_g0} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

gdzie:

r_{jk} - reakcja odpowiadająca nadliczbowej Δ_j wywołana działaniem nadliczbowej $\Delta_k = 1$,

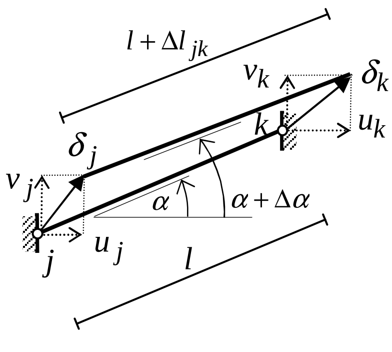
r_{j0} - reakcja odpowiadająca nadliczbowej Δ_j wywołana działaniem obciążenia zewnętrznego.

Macierz współczynników przy niewiadomych r_{jk} jest symetryczna ($r_{jk} = r_{kj}$).

Wyznaczając współczynniki przy niewiadomych r_{jk} powyższego układu równań korzystamy z równań równowagi oraz ze wzorów transformacyjnych.

Wzory transformacyjne

W większości przypadków nie są znane kierunki przemieszczeń węzłów kratownicy. Możemy przedstawić przemieszczenie węzła jako sumę wektorową składowych. W przypadku kratownicy płaskiej są to dwie składowe przemieszczenia (na przykład pozioma i pionowa). Zakładamy, że przemieszczenia węzłów kratownicy są wielkościami małymi w porównaniu z wymiarami układu. Otrzymujemy zależność między wydłużeniem pręta Δl_{jk} a składowymi poziomymi i pionowymi u_j, u_k, v_j, v_k obu końców pręta kratownicy płaskiej. Są to związki geometryczne.



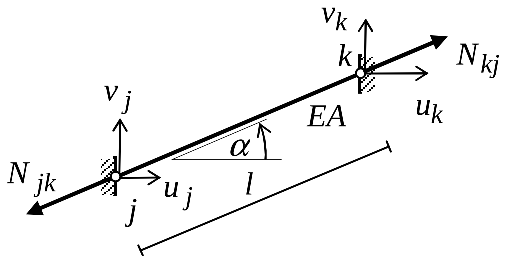
$$u_k \ll l, u_j \ll l, v_k \ll l, v_j \ll l$$

$$\Delta\alpha \to 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \Delta\alpha \to \alpha$$

Przyjęcie założenia, że przemieszczenia węzłów kratownicy są małymi wielkościami w porównaniu z długością prętów pozwala stwierdzić, iż na wielkość Δl_{jk} mają wpływ wyłącznie rzuty przemieszczeń δ_j oraz δ_k na oś pręta *jk*, natomiast rzuty tych przemieszczeń na kierunek prostopadły do osi pręta nie mają wpływu na wydłużenie pręta.

$$\Delta l_{jk} = \left(u_k - u_j\right) \cdot \cos\alpha + \left(v_k - v_j\right) \cdot \sin\alpha$$

Korzystamy również ze związków fizycznych.



$$\Delta l_{jk} = \frac{N_{jk} \cdot l}{EA} \quad \Rightarrow \quad N_{jk} = \frac{\Delta l_{jk} \cdot EA}{l}$$

Po podstawieniu dostajemy wzór transformacyjny.

$$N_{jk} = N_{kj} = \frac{\Delta l_{jk} \cdot EA}{l} = \frac{EA}{l}\left[\left(u_k - u_j\right) \cdot \cos\alpha + \left(v_k - v_j\right) \cdot \sin\alpha\right]$$

Zauważmy, że $\Delta l_{jk} > 0$ oznacza wydłużenie pręta, a siła normalna w pręcie $N_{jk} = N_{kj} > 0$ jest siłą rozciągającą. Z kolei $\Delta l_{jk} < 0$ oznacza skrócenie pręta. W takim przypadku siła normalna $N_{jk} = N_{kj} < 0$ jest siłą ściskającą. Brak wydłużenia pręta $\Delta l_{jk} = 0$ jest równoznaczny z zerowymi wartościami siły $N_{jk} = N_{kj} = 0$. Mamy wtedy do czynienia z tzw. prętem zerowym.

Współczynniki przy niewiadomych układu równań metody przemieszczeń, czyli wyrazy macierzy sztywności r_{jk} oraz wyrazy wolne r_{j0} są wyznaczane z równań równowagi.

W przypadku przyjęcia tego samego zwrotu przemieszczenia Δ_i i reakcji r_{ii}, wartość tej reakcji musi być dodatnia. Oznacza to, że wyrazy na głównej przekątnej macierzy sztywności są dodatnie.

- Rozwiązanie układu równań metody przemieszczeń. Wyznaczamy wartości $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ $\ldots, \Delta_i, \ldots, \Delta_{n_g - 1}, \Delta_{n_g}$.

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \ldots \\ \Delta_i \\ \ldots \\ \Delta_{n_g-1} \\ \Delta_{n_g} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1i} & \ldots & r_{1n_g-1} & r_{1n_g} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2i} & \ldots & r_{2n_g-1} & r_{2n_g} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{i1} & r_{i2} & \ldots & r_{ii} & \ldots & r_{in_g-1} & r_{in_g} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n_g-11} & r_{n_g-12} & \ldots & r_{n_g-1i} & \ldots & r_{n_g-1n_g-1} & r_{n_g-1n_g} \\ r_{n_g1} & r_{n_g2} & \ldots & r_{n_gi} & \ldots & r_{n_gn_g-1} & r_{n_gn_g} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -r_{10} \\ -r_{20} \\ \ldots \\ -r_{i0} \\ \ldots \\ -r_{n_g-10} \\ -r_{n_g0} \end{Bmatrix}$$

gdzie $\left[r_{jk}\right]^{-1}$ jest macierzą odwrotną macierzy sztywności.

- Wyznaczenie sił w prętach kratownicy

Otrzymane wartości przemieszczeń $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_i, ..., \Delta_{n_g-1}, \Delta_{n_g}$ wykorzystamy do obliczenia sił w prętach rozwiązywanej kratownicy. W poniższym zapisie zastosowana jest zasada superpozycji.

$$N_{jk} = N_{jk}^1 \cdot \Delta_1 + N_{jk}^2 \cdot \Delta_2 + ... + N_{jk}^i \cdot \Delta_i + ... + N_{jk}^{n_g-1} \cdot \Delta_{n_g-1} + N_{jk}^{n_g} \cdot \Delta_{n_g} + N_{jk}^0$$

gdzie N_{jk}^i i N_{jk}^0 oznaczają odpowiednio siłę w pręcie *jk* w stanie $\Delta_i = 1$ oraz w stanie zerowym.

Gdy polecenie do zadania nie narzuca metody rozwiązania kratownicy, należy wyznaczyć stopień statycznej niewyznaczalności układu n_s oraz stopień geometrycznej niewyznaczalności n_g. Następnie po porównaniu n_s i n_g dokonać wyboru metody (metoda sił dla $n_s < n_g$, metoda przemieszczeń dla $n_s > n_g$).
W przypadku trzeciej możliwości: $n_s = n_g$, liczba niewiadomych dla obu metod jest taka sama.