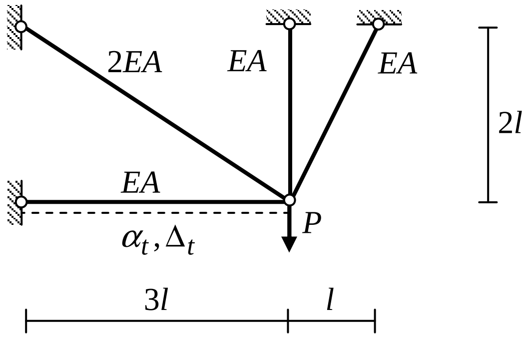
Przykład 6.2. Kratownica dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalna obciążona termicznie

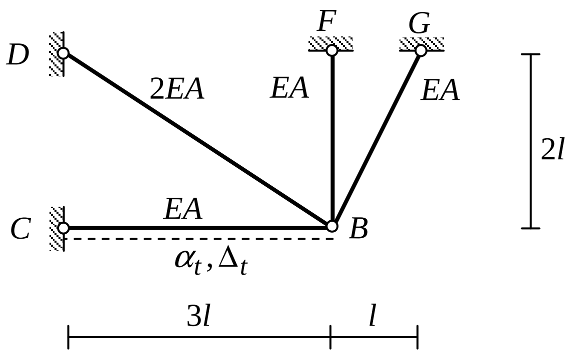
Polecenie: Wyznaczyć siły w prętach dla poniższej kratownicy korzystając z metody przemieszczeń



Rys. 1

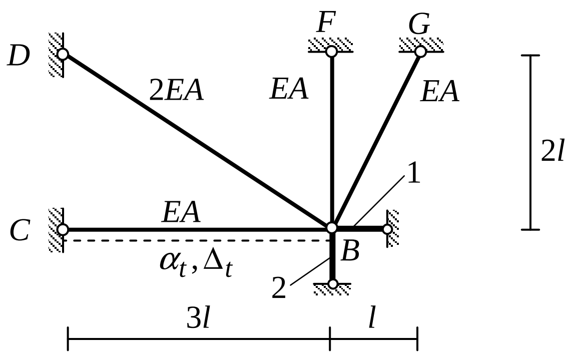
Nie został określony związek między następującymi wielkościami; P, l, E, A oraz α_t, Δ_t.
W takiej sytuacji musimy rozwiązać zadanie osobno dla obciążenia termicznego oraz siły P.
Obciążenie termiczne Δ_t

Na poziomy pręt powyższego układu działa obciążenie termiczne Δ_t o stałym rozkładzie temperatury w przekroju poprzecznym pręta. Wartość Δ_t jest przyrostem temperatury w stosunku do temperatury montażu konstrukcji. Stała materiałowa α_t jest współczynnikiem rozszerzalności termicznej. Wprowadzamy oznaczenia podpór oraz węzła kratownicy.



Rys. 2

W powyższym układzie nieznane są dwie składowe przemieszczenia węzła B. Rozważana kratownica jest dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalna. W celu stworzenia układu geometrycznie wyznaczalnego wprowadzamy fikcyjne więzy w postaci nieodkształcalnych prętów, uniemożliwiających wystąpienie składowej poziomej i pionowej przemieszczenia węzła B. Więz blokujący możliwość przemieszczenia punktu B w kierunku poziomym oznaczamy „1", natomiast w kierunku pionowym „2".



Rys. 3

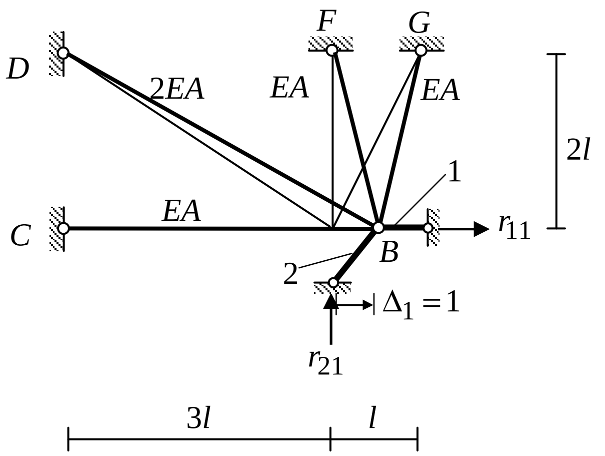
Wyznaczamy długości pręta *BD* i *BG*.

$$l_{BD} = \sqrt{(3l)^2 + (2l)^2} = \sqrt{13}\, l$$

$$l_{BG} = \sqrt{l^2 + (2l)^2} = \sqrt{5}\, l$$

Przystępujemy do rozpatrywania kolejnych stanów.

Stan $\Delta_1 = 1$



Rys. 4

Przemieszczenie $\Delta_1 = 1$ ma kierunek poziomy. Oś pręta *BD* z kierunkiem poziomym tworzy kąt, którego cosinus wynosi $3/\sqrt{13}$, a oś pręta *BG* nachylona jest do poziomu pod kątem, którego cosinus kąta ma wartość $1/\sqrt{5}$. Rzut przemieszczenia $\Delta_1 = 1$ na oś pręta *BC* wynosi 1, a na oś pręta *BF* jest równy zero. Pręty *BC* i *BD* ulegną wydłużeniu, natomiast pręt *BG* skróceniu. W poniższych zależnościach górny indeks oznacza, dla którego stanu wyznaczone są wielkości wydłużeń i sił normalnych.

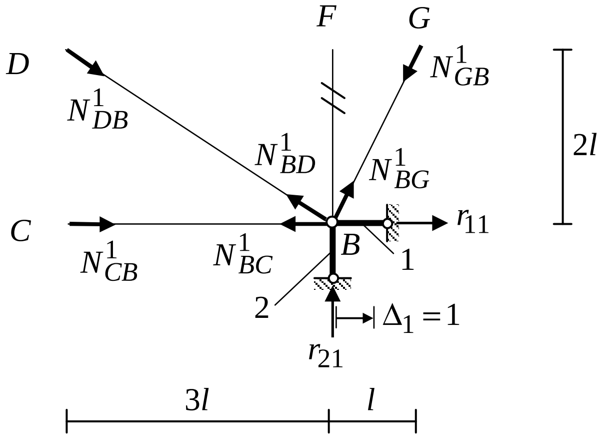
$$\Delta l_{BC}^1 = \Delta_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad N_{BC}^1 = N_{CB}^1 = \frac{\Delta l_{BC}^1 \cdot EA}{3l} = \frac{1 \cdot EA}{3l} = \frac{1}{3} \cdot \frac{EA}{l}$$

$$\Delta l_{BD}^1 = \Delta_1 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \Rightarrow \quad N_{BD}^1 = N_{DB}^1 = \frac{\Delta l_{BD}^1 \cdot 2EA}{\sqrt{13}\, l} = \frac{\frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 2EA}{\sqrt{13}\, l} = \frac{6}{13} \cdot \frac{EA}{l}$$

$$\Delta l_{BF}^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{BC}^1 = N_{CB}^1 = \frac{\Delta l_{BF}^1 \cdot EA}{2l} = \frac{0 \cdot EA}{2l} = 0$$

$$\Delta l_{BG}^1 = -\Delta_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad N_{BG}^1 = N_{GB}^1 = \frac{\Delta l_{BG}^1 \cdot EA}{\sqrt{5}\, l} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot EA}{\sqrt{5}\, l} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{EA}{l}$$

Zapiszemy dwa równania równowagi dla węzła *B*. W celu wyznaczenia reakcji r_{11} zapiszemy równanie równowagi rzutów sił na oś poziomą, natomiast równanie rzutów na oś pionową wykorzystamy do obliczenia reakcji r_{21}.



Rys. 5

$$\sum_i P_{ix}^B = 0: \quad -N^1_{BC} - N^1_{BD} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + N^1_{BG} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + r_{11} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{3} \cdot \frac{EA}{l} - \frac{6}{13} \cdot \frac{EA}{l} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + \left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{EA}{l}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + r_{11} = 0 \quad \Rightarrow$$

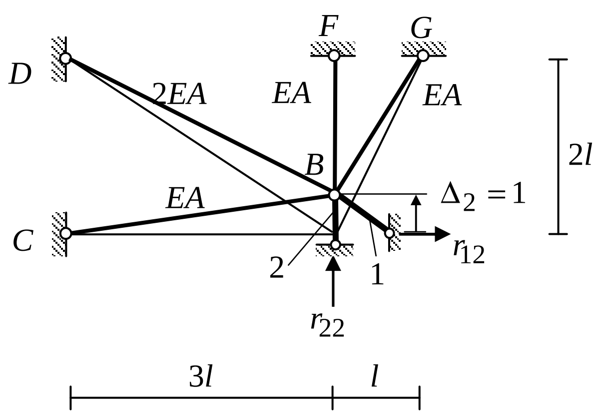
$$\Rightarrow \quad r_{11} = \left(\frac{1}{3} + \frac{18}{13\sqrt{13}} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{EA}{l} \quad \Rightarrow \quad r_{11} \cong 0{,}8068 \cdot \frac{EA}{l}$$

$$\sum_i P_{iy}^B = 0: \quad N^1_{BD} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + N^1_{BG} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + r_{21} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad +\frac{6}{13} \cdot \frac{EA}{l} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + \left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{EA}{l}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + r_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{21} = \left(-\frac{12}{13\sqrt{13}} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{EA}{l} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r_{21} \cong -0{,}0771 \cdot \frac{EA}{l}$$

Stan $\Delta_2 = 1$



Rys. 6

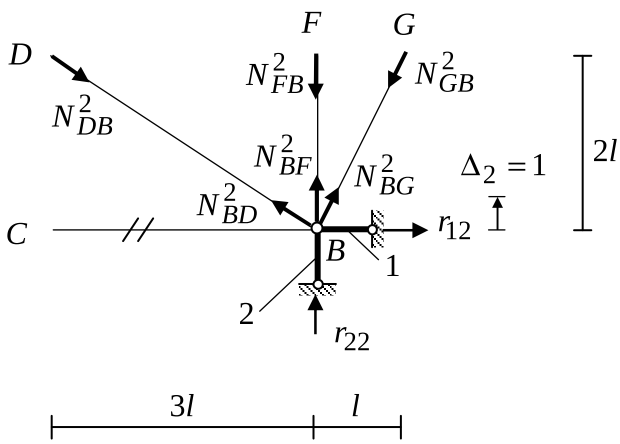
Przemieszczenie $\Delta_2 = 1$ ma kierunek pionowy. Oś pręta *BD* z kierunkiem pionowym tworzy kąt, którego cosinus wynosi $2/\sqrt{13}$, a oś pręta *BG* nachylona jest do pionu pod kątem, którego cosinus ma wartość $2/\sqrt{5}$. Rzut przemieszczenia $\Delta_2 = 1$ na oś pręta *BC* wynosi 0, natomiast na oś pręta *BF* jest równy 1. Pręty *BD*, *BF* i *BG* ulegną skróceniu, a pręt *BC* nie zmieni długości. W poniższych zależnościach górny indeks oznacza, dla którego stanu wyznaczone są wielkości wydłużeń i sił normalnych.

$$\Delta l_{BC}^2 = 0 \cdot \Delta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{BC}^2 = N_{CB}^2 = \frac{\Delta l_{BC}^2 \cdot EA}{3l} = \frac{0 \cdot EA}{3l} = 0$$

$$\Delta l_{BD}^2 = -\Delta_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}} \quad \Rightarrow \quad N_{BD}^2 = N_{DB}^2 = \frac{\Delta l_{BD}^2 \cdot 2EA}{\sqrt{13}\, l} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{13}} \cdot 2EA}{\sqrt{13}\, l} = -\frac{4}{13} \cdot \frac{EA}{l}$$

$$\Delta l_{BF}^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad N_{BF}^2 = N_{FB}^2 = \frac{\Delta l_{BF}^2 \cdot EA}{2l} = -\frac{1 \cdot EA}{2l} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{EA}{l}$$

$$\Delta l_{BG}^2 = -\Delta_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad N_{BG}^2 = N_{GB}^2 = \frac{\Delta l_{BG}^2 \cdot EA}{\sqrt{5}\, l} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot EA}{\sqrt{5}\, l} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{EA}{l}$$



Rys. 7

Zapiszemy dwa równania równowagi dla węzła *B*. W celu wyznaczenia reakcji r_{12} wykorzystamy równanie równowagi rzutów sił na oś poziomą, a równanie rzutów na oś pionową do obliczenia reakcji r_{22}.

$$\sum_i P_{ix}^B = 0: \quad -N_{BC}^2 - N_{BD}^2 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + N_{BG}^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + r_{12} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -0 \cdot \frac{EA}{l} - \left(-\frac{4}{13} \cdot \frac{EA}{l}\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + \left(-\frac{2}{5} \cdot \frac{EA}{l}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + r_{12} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r_{12} = \left(-\frac{12}{13\sqrt{13}} - \frac{2}{5\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{EA}{l} \quad \Rightarrow \quad r_{12} \cong -0{,}0771 \cdot \frac{EA}{l}$$

$$\sum_i P_{iy}^B = 0: \quad N_{BD}^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + N_{BF}^2 + N_{BG}^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + r_{22} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(-\frac{4}{13} \cdot \frac{EA}{l}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{EA}{l}\right) + \left(-\frac{2}{5} \cdot \frac{EA}{l}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + r_{22} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r_{22} = \left(\frac{8}{13\sqrt{13}} + \frac{1}{2} + \frac{4}{5\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{EA}{l} \quad \Rightarrow \quad r_{22} \cong 1{,}0284 \cdot \frac{EA}{l}$$

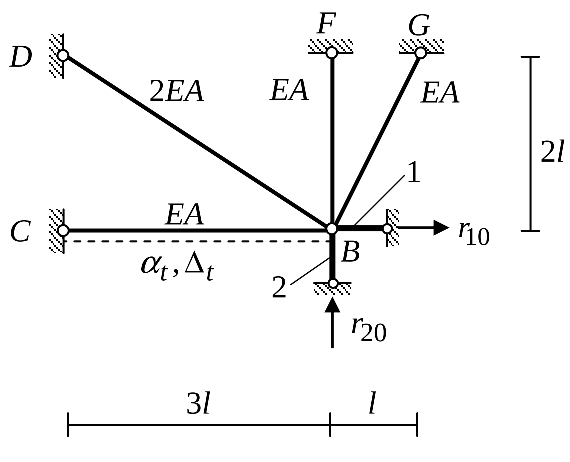
Stan zerowy
W stanie zerowym składowa pionowa i pozioma przemieszczenia węzła B są zerowe. Wydłużenia wszystkich prętów układu są równe zero.

$$\Delta l_{BC}^0 = \Delta l_{BD}^0 = \Delta l_{BF}^0 = \Delta l_{BG}^0 = 0$$

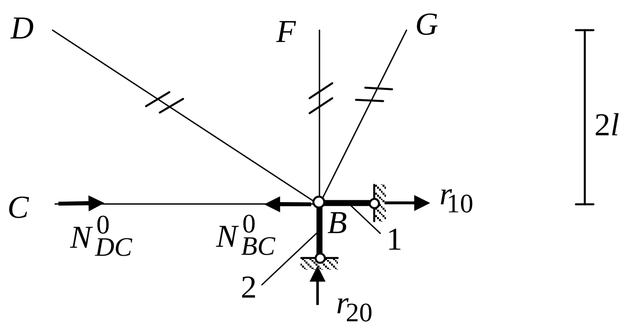
W stanie zerowym w prętach BD, BF i BG siły mają wartości równe zero. Na pręt CB działa obciążenie termiczne Δ_t. Wydłużenie tego pręta jest sumą wydłużenia wywołanego obciążeniem zewnętrznym oraz działaniem siły N_{BC}^0. Przyrównując sumaryczne wydłużenie pręta CB do zera dostajemy warunek, z którego obliczamy N_{BC}^0. Wartość tej siły umożliwi nam wyznaczenie reakcje r_{10} i r_{20}.

$$N_{BD}^0 = N_{BF}^0 = N_{BG}^0 = 0$$

$$\frac{N_{BC}^0 \cdot 3l}{EA} + \alpha_t \cdot \Delta t \cdot 3l = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{BC}^0 = -EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta t$$



Rys. 8



Rys. 9

$$\sum_i P_{ix}^B = 0: \quad -N_{BC}^0 - N_{BD}^0 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + N_{BG}^0 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + r_{10} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\left(-EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t\right) - 0 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + r_{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{10} = -EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t$$

$$\sum_i P_{iy}^B = 0: \quad N_{BD}^0 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + N_{BF}^0 + N_{BG}^0 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + r_{20} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + 0 + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + r_{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{20} = 0$$

Układ równań metody przemieszczeń ma postać

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_{10} \\ r_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po podstawieniu wyznaczonych reakcji więzów otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 0{,}8068 \cdot \dfrac{EA}{l} & -0{,}0771 \cdot \dfrac{EA}{l} \\ -0{,}0771 \cdot \dfrac{EA}{l} & 1{,}0284 \cdot \dfrac{EA}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Do obliczenia niewiadomych możemy wykorzystać macierz odwrotną

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8068 \cdot \dfrac{EA}{l} & -0{,}0771 \cdot \dfrac{EA}{l} \\ -0{,}0771 \cdot \dfrac{EA}{l} & 1{,}0284 \cdot \dfrac{EA}{l} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -\left(-EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta t\right) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Wyznaczamy macierz odwrotną

$$\begin{bmatrix} 0{,}8068 \cdot \dfrac{EA}{l} & -0{,}0771 \cdot \dfrac{EA}{l} \\ -0{,}0771 \cdot \dfrac{EA}{l} & 1{,}0284 \cdot \dfrac{EA}{l} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}2484 \cdot \dfrac{l}{EA} & 0{,}0936 \cdot \dfrac{l}{EA} \\ 0{,}0936 \cdot \dfrac{l}{EA} & 0{,}9794 \cdot \dfrac{l}{EA} \end{bmatrix}$$

Następnie obliczamy składowe przemieszczenia węzła *B*

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2484 \cdot \dfrac{l}{EA} & 0{,}0936 \cdot \dfrac{l}{EA} \\ 0{,}0936 \cdot \dfrac{l}{EA} & 0{,}9794 \cdot \dfrac{l}{EA} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}2484\, l \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \\ 0{,}0936\, l \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \end{Bmatrix}$$

Przystępujemy do wyznaczania sił w prętach kratownicy. W poniższym zapisie zastosowana jest zasada superpozycji.

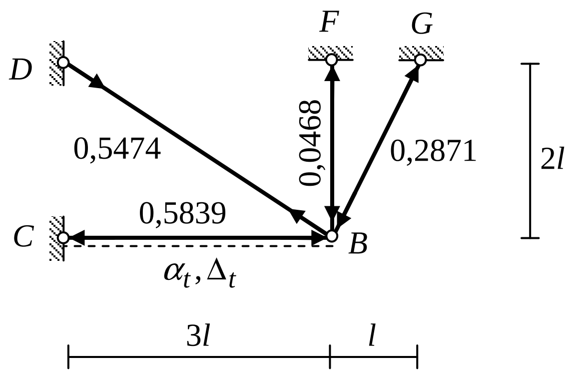
$$N_{BC} = N_{CB} = N_{BC}^{1} \cdot \Delta_1 + N_{BC}^{2} \cdot \Delta_2 + N_{BC}^{0} =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{EA}{l} \cdot 1{,}2484 \cdot l \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t + 0 \cdot 0{,}0936 \cdot l \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t + \left(- EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t\right) = -0{,}5839\, EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t$$

$$N_{BD} = N_{DB} = N_{BD}^{1} \cdot \Delta_1 + N_{BD}^{2} \cdot \Delta_2 + N_{BD}^{0} =$$
$$= \frac{6}{13} \cdot \frac{EA}{l} \cdot 1{,}2484 \cdot l \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t + \left(-\frac{4}{13} \cdot \frac{EA}{l}\right) \cdot 0{,}0936 \cdot l \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t + 0 = 0{,}5474\, EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t$$

$$N_{BF} = N_{FB} = N_{BF}^{1} \cdot \Delta_1 + N_{BF}^{2} \cdot \Delta_2 + N_{BF}^{0} =$$
$$= 0 \cdot 1{,}2484 \cdot l \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t + \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{EA}{l}\right) \cdot 0{,}0936 \cdot l \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t + 0 = -0{,}0468\, EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t$$

$$N_{BG} = N_{GB} = N_{BG}^{1} \cdot \Delta_1 + N_{BG}^{2} \cdot \Delta_2 + N_{BG}^{0} =$$
$$= \left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{EA}{l}\right) \cdot 1{,}2484 \cdot l \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t + \left(-\frac{2}{5} \cdot \frac{EA}{l}\right) \cdot 0{,}0936 \cdot l \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t + 0 = -0{,}2871\, EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t$$

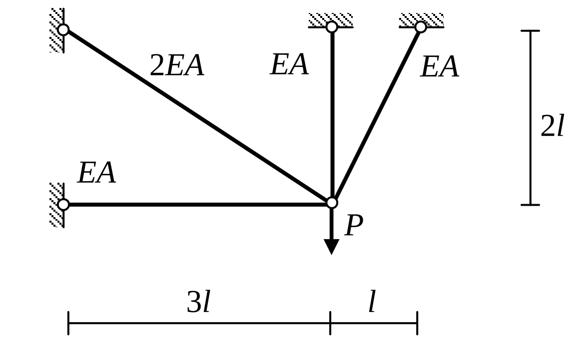
Na schemacie kratownicy zaznaczamy zwroty i wartości sił w prętach.



Mnożnik: $EA \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t$

Rys. 10

Rozważany układ poddany jest działaniu dwóch różnych rodzajów obciążenia: termicznego i siły skupionej. Rozpatrujemy teraz obciążenie siłą skupioną *P*. W przypadku wcześniejszego rozwiązania zadania z uwzględnieniem obciążenia termicznego, możemy wykorzystać wyznaczoną macierz sztywności i jej macierz odwrotną do rozwiązania układu, na który działa kolejny rodzaj obciążenia. Wystarczy obliczyć reakcje w nadliczbowych więzach w stanie zerowym, czyli wyznaczyć kolumnę wyrazów wolnych, a następnie niewiadome przemieszczenia oraz siły w prętach.

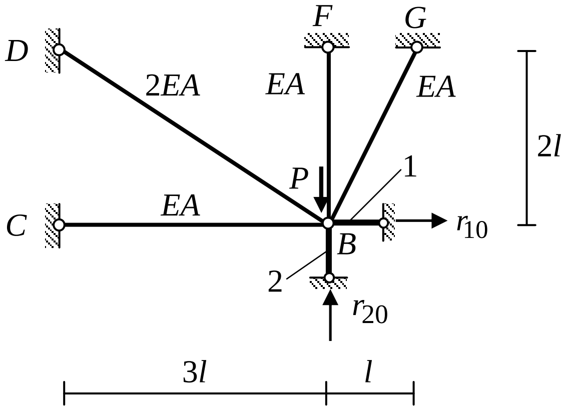


Rys. 11

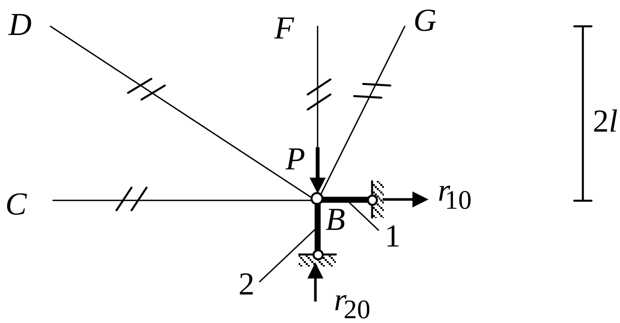
W celu wykorzystania wcześniej wykonanych obliczeń należy oczywiście przyjąć ten sam układ geometrycznie wyznaczalny.

Stan zerowy
W stanie zerowym składowa pionowa i pozioma przemieszczenia węzła B są zerowe. Wydłużenia wszystkich prętów układu oraz siły w prętach są równe zero.

$$\Delta l_{BC}^{0} = \Delta l_{BD}^{0} = \Delta l_{BF}^{0} = \Delta l_{BG}^{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{BC}^{0} = N_{BD}^{0} = N_{BF}^{0} = N_{BG}^{0} = 0$$



Rys. 12



Rys. 13

Z równań równowagi dla węzła B dostajemy

$$\sum_i P_{ix}^{B} = 0: \quad -N_{BC}^{0} - N_{BD}^{0} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + N_{BG}^{0} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + r_{10} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -0 - 0 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + r_{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{10} = 0$$

$$\sum_i P_{iy}^{B} = 0: \quad N_{BD}^{0} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + N_{BF}^{0} + N_{BG}^{0} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - P + r_{20} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + 0 + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - P + r_{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{20} = P$$

$$\begin{Bmatrix} r_{10} \\ r_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

Do układu równań metody przemieszczeń podstawiamy reakcje więzów r_{10} i r_{20}

$$\begin{bmatrix} 0{,}8068\cdot\dfrac{EA}{l} & -0{,}0771\cdot\dfrac{EA}{l} \\ -0{,}0771\cdot\dfrac{EA}{l} & 1{,}0284\cdot\dfrac{EA}{l}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ P\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

Wykorzystujemy poprzednio wyznaczoną macierz odwrotną w celu wyznaczenia składowych przemieszczenia węzła *B*.

$$\begin{Bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}8068\cdot\dfrac{EA}{l} & -0{,}0771\cdot\dfrac{EA}{l} \\ -0{,}0771\cdot\dfrac{EA}{l} & 1{,}0284\cdot\dfrac{EA}{l}\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{Bmatrix}0\\ -P\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1{,}2484\cdot\dfrac{l}{EA} & 0{,}0936\cdot\dfrac{l}{EA} \\ 0{,}0936\cdot\dfrac{l}{EA} & 0{,}9794\cdot\dfrac{l}{EA}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\ -P\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\begin{Bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0{,}0936\cdot\dfrac{Pl}{EA}\\ -0{,}9794\cdot\dfrac{Pl}{EA}\end{Bmatrix}$$

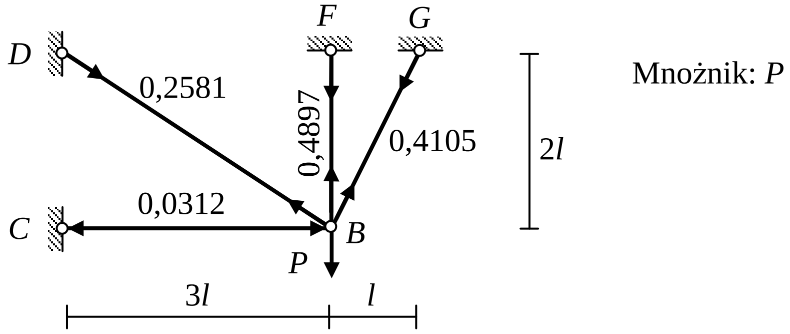
Następnie wyznaczamy siły w prętach

$$N_{BC}=N_{CB}=N_{BC}^{1}\cdot\Delta_1+N_{BC}^{2}\cdot\Delta_2+N_{BC}^{0}=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{EA}{l}\cdot\left(-0{,}0936\cdot\frac{Pl}{EA}\right)+0\cdot\left(-0{,}9794\cdot\frac{Pl}{EA}\right)+0=-0{,}0312\,P$$

$$N_{BD}=N_{DB}=N_{BD}^{1}\cdot\Delta_1+N_{BD}^{2}\cdot\Delta_2+N_{BD}^{0}=$$
$$=\frac{6}{13}\cdot\frac{EA}{l}\cdot\left(-0{,}0936\cdot\frac{Pl}{EA}\right)+\left(-\frac{4}{13}\cdot\frac{EA}{l}\right)\cdot\left(-0{,}9794\cdot\frac{Pl}{EA}\right)+0=0{,}2581\,P$$

$$N_{BF}=N_{FB}=N_{BF}^{1}\cdot\Delta_1+N_{BF}^{2}\cdot\Delta_2+N_{BF}^{0}=$$
$$=0\cdot\left(-0{,}0936\cdot\frac{Pl}{EA}\right)+\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{EA}{l}\right)\cdot\left(-0{,}9794\cdot\frac{Pl}{EA}\right)+0=0{,}4897\,P$$

$$N_{BG}=N_{GB}=N_{BG}^{1}\cdot\Delta_1+N_{BG}^{2}\cdot\Delta_2+N_{BG}^{0}=$$
$$=\left(-\frac{1}{5}\cdot\frac{EA}{l}\right)\cdot\left(-0{,}0936\cdot\frac{Pl}{EA}\right)+\left(-\frac{2}{5}\cdot\frac{EA}{l}\right)\cdot\left(-0{,}9794\cdot\frac{Pl}{EA}\right)+0=0{,}4104\,P$$



Rys. 14