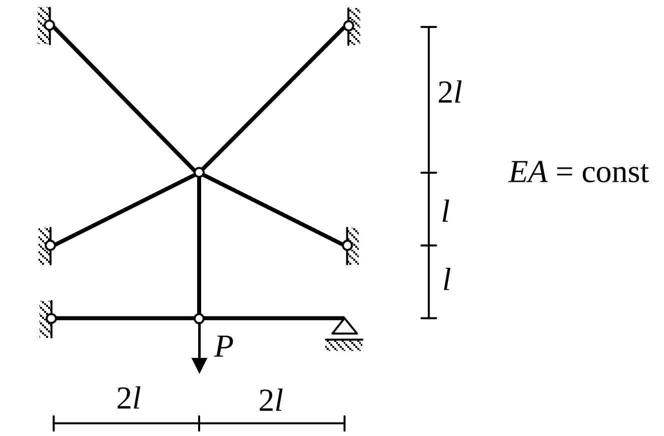
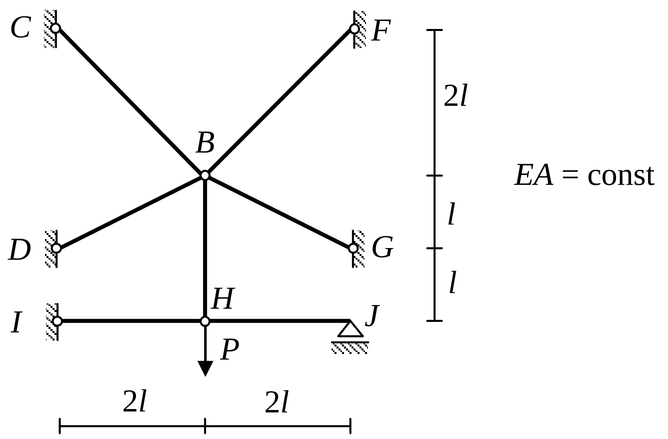
Przykład 6.1. Kratownica jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalna

Polecenie: Wyznaczyć siły w prętach dla poniższej kratownicy korzystając z metody przemieszczeń



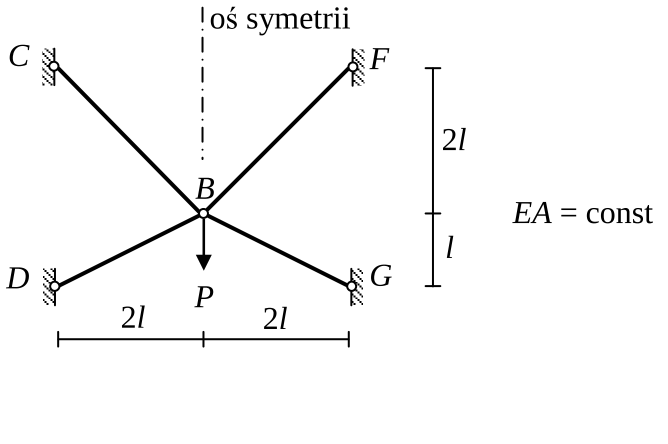
Rys. 1

Wprowadzamy oznaczenia podpór oraz węzłów kratownicy.



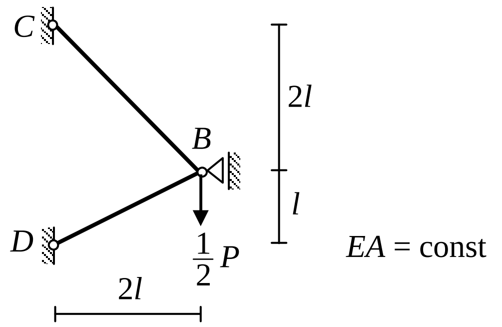
Rys. 2

W powyższym układzie nieznane są po dwie składowe przemieszczenia węzła B i H oraz przemieszczenie poziome węzła podporowego J. Rozważana kratownica jest pięciokrotnie geometrycznie niewyznaczalna. Zauważmy, że wartości sił N_{HJ}, N_{IH} i N_{BH} mogą być wyznaczone z równań równowagi. Reakcja podpory J oraz siła N_{HJ} są równe zero. Z równań równowagi zapisanych dla węzła H wynika, że siła N_{IH} ma również wartość zerową, natomiast siła $N_{BH} = P$. Dodatnia wartość tej siły oznacza, że pręt BH jest rozciągany. Pozostałe siły możemy wyznaczyć rozwiązując górną część układu.



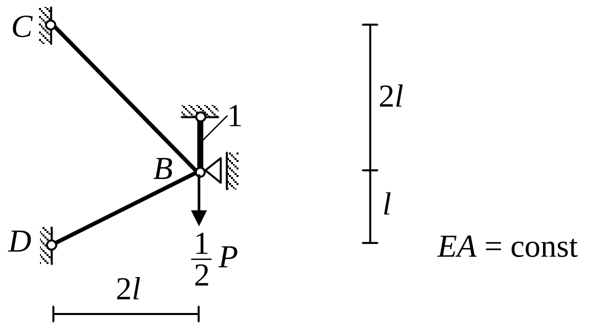
Rys. 3

W takim układzie nieznane są dwie składowe przemieszczenia węzła *B*. Rozważana kratownica jest dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalna.
Zwróćmy również uwagę, że kratownica z rys. 3 ma budowę symetryczną względem osi pionowej przechodzącej przez punkt *B*. Symetria dotyczy nie tylko geometrii układu, ale też sztywności ściskania. EA_{CB} = E_{BF} oraz EA_{DB} = EA_{BG}, poza tym kratownica obciążona jest symetrycznie (siła *P* działa wzdłuż osi symetrii). W tej sytuacji możemy stwierdzić, że składowa pozioma przemieszczenia punktu *B* jest równa zero. Tym samym możemy rozwiązać zadanie zajmując się układem, w którym występuje tylko jedna niewiadoma geometryczna: składowa pionowa przemieszczenia punktu *B*. Korzystne jest przeprowadzenie obliczeń w układzie zredukowanym („połówkowym”) znajdującym się na rys. 4. Redukcja musi obejmować również obciążenie zewnętrzne. Do obliczeń można przyjąć lewy lub prawy układ zredukowany.



Rys. 4

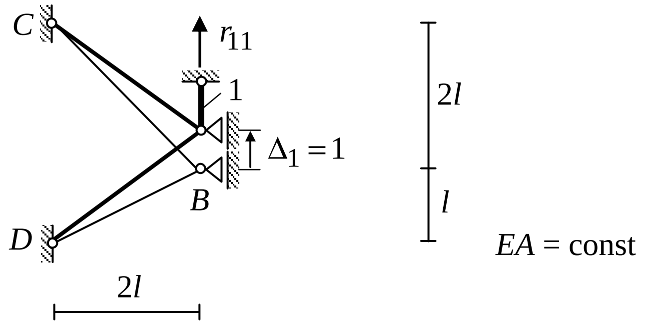
Powyższy układ jest jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalny. W celu stworzenia układu geometrycznie wyznaczalnego wprowadzamy fikcyjny więz w postaci nieodkształcalnego pręta, który uniemożliwia wystąpienie pionowego przemieszczenia węzła *B*. Więz ten oznaczamy „1”.



Rys. 5

Przystępujemy do rozpatrywania kolejnych stanów.

Stan $\Delta_1 = 1$



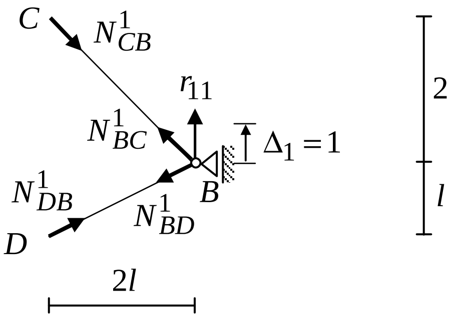
Rys. 6

Długość pręta *BD* wynosi $l_{BD} = \sqrt{(2l)^2 + l^2} = \sqrt{5}\,l$. Przemieszczenie $\Delta_1 = 1$ ma kierunek pionowy. Oś pręta *BD* z kierunkiem pionowym tworzy kąt, którego cosinus wynosi $1/\sqrt{5}$. Oś pręta *BC* nachylona jest do pionu pod kątem $\pi/4$, stąd cosinus tego kąta ma wartość $1/\sqrt{2}$. Przy przyjętym zwrocie przemieszczenia Δ_1 do góry, pręt *BD* ulegnie wydłużeniu, natomiast pręt *BD* skróceniu. Górny indeks oznacza, dla którego stanu wyznaczone są wielkości wydłużeń i sił dla normalnych.

$$\Delta l_{BD}^1 = \Delta_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad N_{BD}^1 = N_{DB}^1 = \frac{\Delta l_{BD}^1 \cdot EA}{\sqrt{5}l} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot EA}{\sqrt{5}l} = \frac{1}{5} \cdot \frac{EA}{l}$$

$$\Delta l_{BC}^1 = -\Delta_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad N_{BC}^1 = N_{CB}^1 = \frac{\Delta l_{BC}^1 \cdot EA}{2\sqrt{2}l} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot EA}{2\sqrt{2}l} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{EA}{l}$$

W celu wyznaczenia reakcji r_{11} zapiszemy równanie równowagi dla węzła *B*.



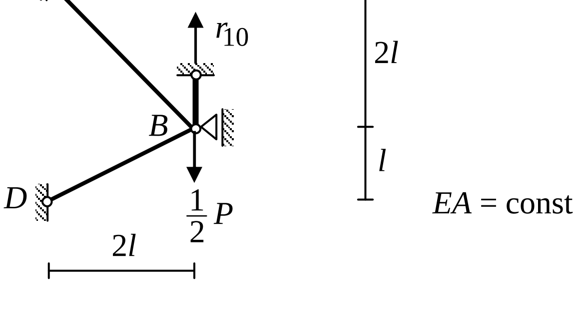
Rys. 7

$$\sum_i P_{iy}^B = 0: \quad -N_{BD}^1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + N_{BC}^1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + r_{11} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{5} \cdot \frac{EA}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{EA}{l}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + r_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{11} = \left(\frac{1}{5\sqrt{5}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{EA}{l} \cong 0{,}2662 \cdot \frac{EA}{l}$$

Należy zauważyć, że w przypadku przyjęcia tego samego zwrotu przemieszczenia Δ_i i reakcji r_{ii} wartość tej reakcji musi być dodatnia. Oznacza to, że wyrazy na głównej przekątnej macierzy sztywności są dodatnie.

Stan zerowy
Układ geometrycznie wyznaczalny obciążamy obciążeniem zewnętrznym.

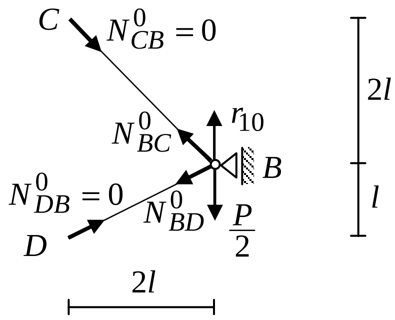


Rys. 8

W stanie zerowym przemieszczenie węzła B jest równe zero.

$$\Delta l_{BC}^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{BC}^0 = N_{CB}^0 = \frac{\Delta l_{BC}^0 \cdot EA}{2\sqrt{2}\,l} = \frac{0 \cdot EA}{2\sqrt{2}\,l} = 0$$

$$\Delta l_{BD}^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{BD}^0 = N_{DB}^0 = \frac{\Delta l_{BD}^0 \cdot EA}{\sqrt{5}\,l} = \frac{0 \cdot EA}{\sqrt{5}\,l} = 0$$



Rys. 9

Z równania rzutów sił na oś pionową dla węzła B wyznaczamy reakcję r_{10}.

$$\sum_i P_{iy}^B = 0: \quad -N_{BD}^0 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + N_{BC}^0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{P}{2} + r_{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad -0 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{P}{2} + r_{10} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r_{10} = \frac{P}{2}$$

Korzystając z zasady superpozycji otrzymamy następujące równanie

$$r_{11} \cdot \Delta_1 + r_{10} = 0$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości reakcji fikcyjnej podpory w stanie $\Delta_1 = 1$ (r_{11}) oraz w stanie zerowym (r_{10}) dostajemy równanie, z którego wyznaczamy niewiadomą Δ_1.

$$0{,}2662 \cdot \frac{EA}{l} \cdot \Delta_1 + \frac{1}{2} P = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_1 = -\frac{1}{2} P \cdot \frac{1}{0{,}2662} \cdot \frac{l}{EA} \cong -1{,}8782 \frac{Pl}{EA}$$

Ujemna wartość składowej pionowej przemieszczenia węzła B świadczy o tym, że jego zwrot jest przeciwny do założonego.
Wartości sił w prętach w rozważanej kratownicy geometrycznie niewyznaczalnej obliczamy korzystając z zasady superpozycji.

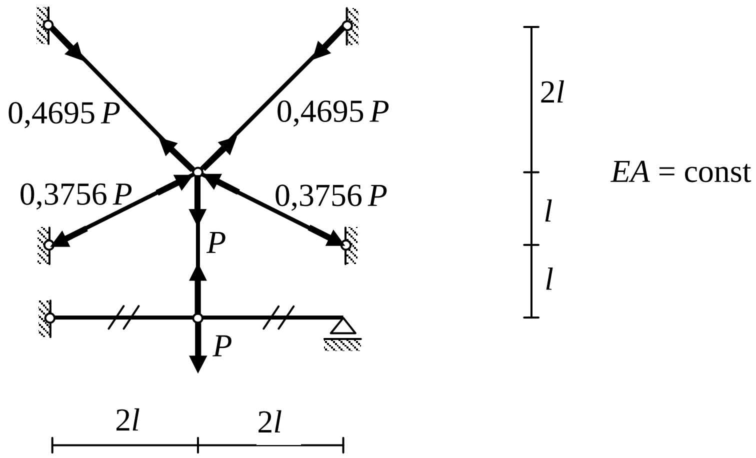
$$N_{BC} = N_{BC}^1 \cdot \Delta_1 + N_{BC}^0 \quad \Rightarrow \quad N_{BC} = -\frac{1}{4} \frac{EA}{l} \cdot \left(-1{,}8782 \frac{Pl}{EA} \right) + 0 = 0{,}4695\,P$$

$$N_{BD} = N_{BC}^1 \cdot \Delta_1 + N_{BD}^0 \quad \Rightarrow \quad N_{BD} = \frac{1}{5} \frac{EA}{l} \cdot \left(-1{,}8782 \frac{Pl}{EA} \right) + 0 = -0{,}3756\,P$$

Na schemacie kratownicy zaznaczamy zwroty i wartości sił w prętach. Dla prętów w prawej części układu, położonych symetrycznie w stosunku do prętów lewej części, wartości i zwroty sił są jednakowe.

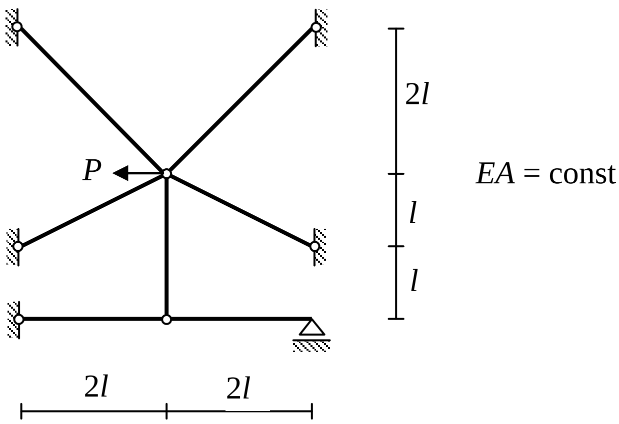
$$N_{BF} = N_{BC} = 0{,}4695\,P$$

$$N_{BG} = N_{BD} = -0{,}3756\,P$$



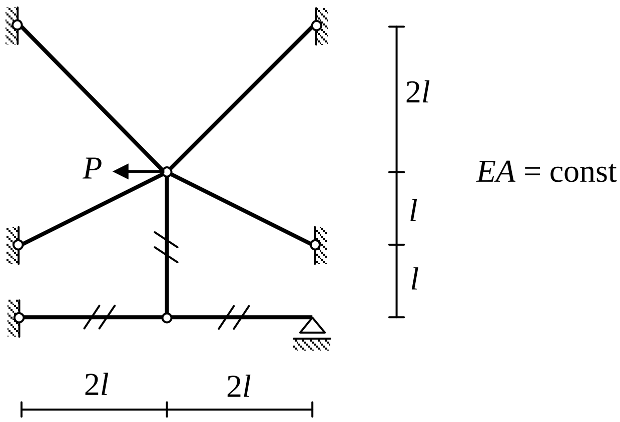
Rys. 10

Czytelnika zachęca się do wyznaczenia sił w prętach dla układu ze zmienionym obciążeniem przedstawionym na rys. 11.



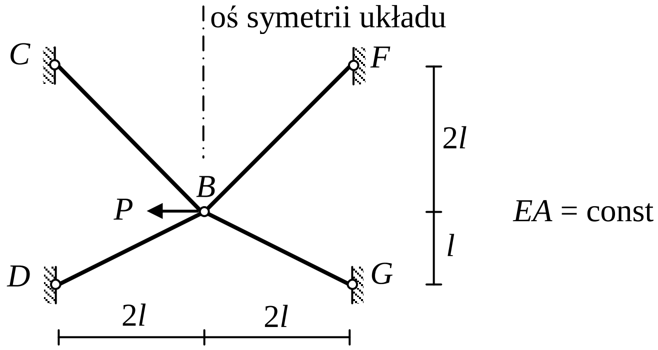
Rys. 11

W celu ułatwienia rozwiązania zadania wyznaczamy pręty zerowe.



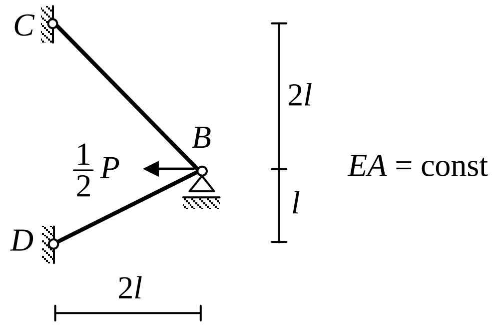
Rys. 12

Wprowadzamy oznaczenia podpór oraz węzła kratownicy.



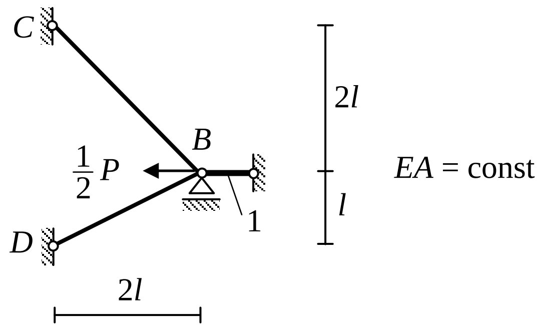
Rys. 13

Dla powyższej kratownicy oś symetrii układu jest jednocześnie osią antysymetrii obciążenia. W tej sytuacji możemy stwierdzić, że składowa pionowa przemieszczenie punktu *B* jest równa zero. Oznacza to, że możemy rozwiązać zadanie zajmując się układem, w którym występuje tylko jedna niewiadoma geometryczna: składowa pozioma przemieszczenia punktu *B*. Korzystne jest przeprowadzenie obliczeń w układzie zredukowanym („połówkowym") znajdującym się na rys. 14. Redukcja musi obejmować również obciążenie zewnętrzne. Do obliczeń można przyjąć lewy lub prawy układ zredukowany.



Rys. 14

Powyższy układ jest jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalny. W celu stworzenia układu geometrycznie wyznaczalnego wprowadzamy fikcyjny więz w postaci nieodkształcalnego pręta, który uniemożliwia wystąpienie poziomego przemieszczenia węzła *B*. Więz ten oznaczamy „1".



Rys. 15

Należy pamiętać, że dla prętów w prawej części układu, położonych symetrycznie w stosunku do prętów lewej części, wartości bezwzględne sił są jednakowe, a zwroty przeciwne. Wynika to z antysymetrycznego obciążenia układu.

$$N_{BF} = -N_{BC} \quad \text{oraz} \quad N_{BD} = -N_{BG}$$