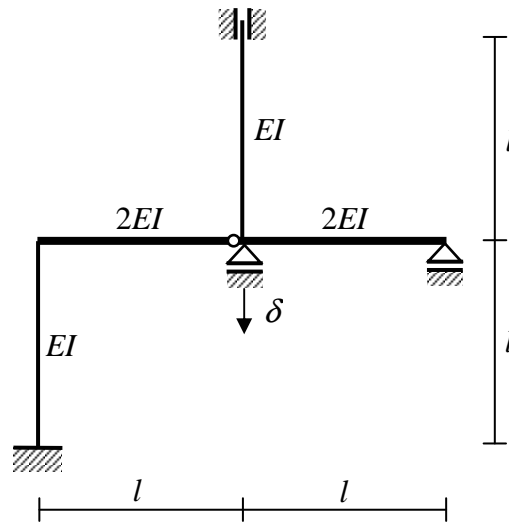


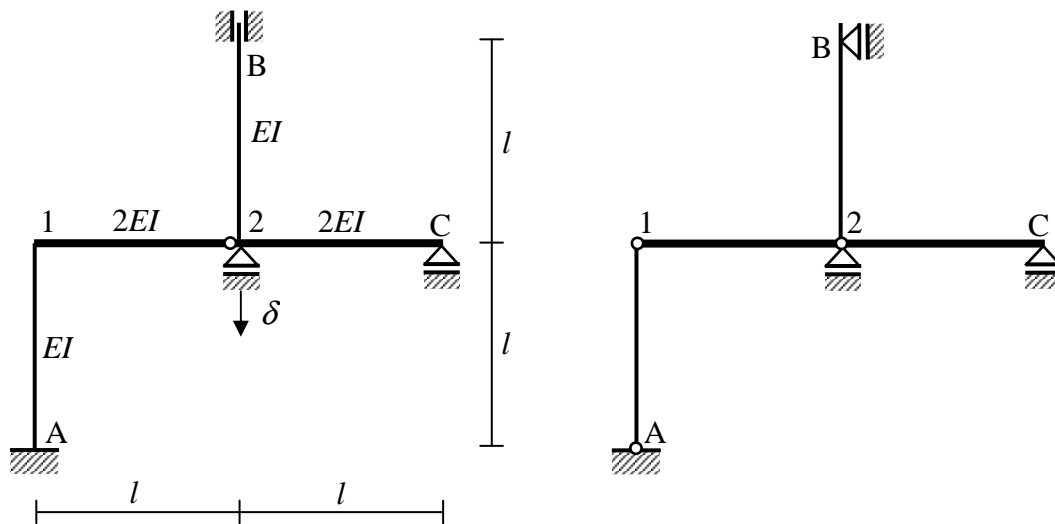
Przykład 9.6. Rama obciążona błędem montażowym

Polecenie: Sporządzić wykresy sił przekrojowych dla poniższej ramy korzystając z metody przemieszczeń



Rys. 1

Oznaczamy podpory oraz węzły sztywne. W powyższej ramie występują dwa węzły sztywne: 1 (łączy pręty 1A i 12) i 2 (łączy pręty 2B i 2C). Pręt 12 jest przegubowo połączony z węzłem 2. W celu wyznaczenia stopnia geometrycznej niewyznaczalności musimy określić liczbę stopni swobody łańcucha kinematycznego, utworzonego z rozpatrywanej ramy. Wprowadzamy przeguby w utwierdzeniu A i w tulei B oraz w węzłach 1 i 2.



Rys. 2

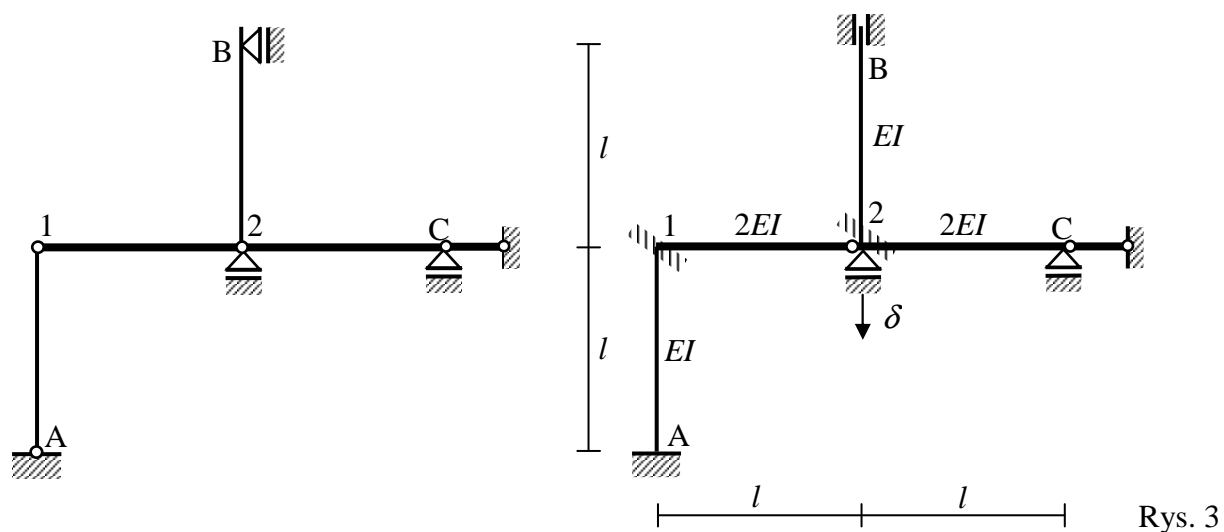
Liczbę stopni swobody łańcucha kinematycznego wyznaczamy ze wzoru

$$l_s = 3 \cdot t - w_w - w_z = 3 \cdot 4 - 6 - 5 = 12 - 11 = 1$$

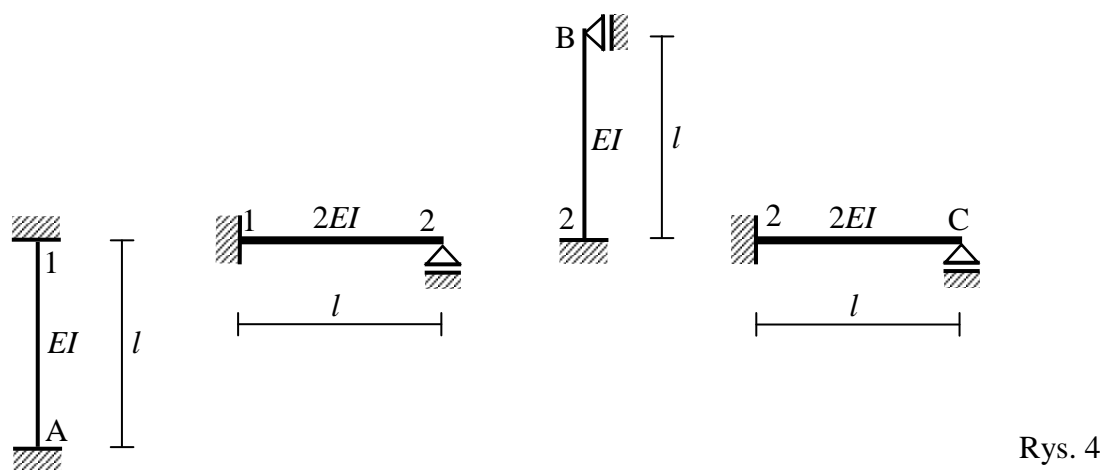
gdzie:

- t - liczba tarcz (prętów),
- w_w - liczba więzów wewnętrznych,
- w_z - liczba więzów zewnętrznych.

Wystarczy wprowadzić jeden dodatkowy więz, aby łańcuch kinematyczny stał się układem nieprzesuwным. Na rysunku 3 po prawej stronie znajduje się układ geometrycznie wyznaczalny.



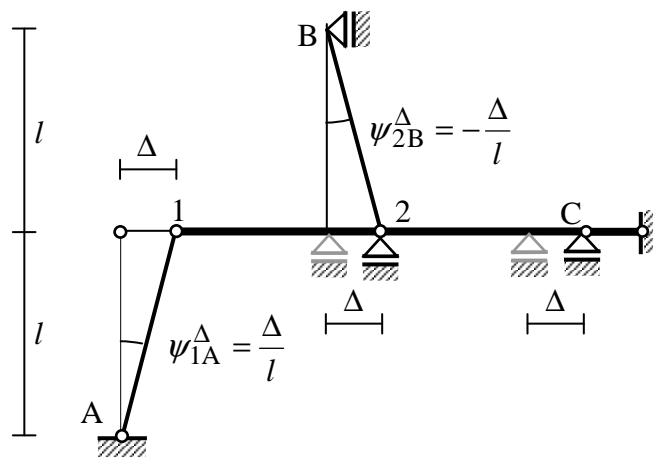
Na podstawie układu geometrycznie wyznaczalnego ustalamy schematy dla poszczególnych prętów ramy.



Niewiadomymi geometrycznymi są kąty obrotu węzłów 1 i 2 oraz przesuw rygla. Należałoby rozpatrywać kolejno stany: $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 1$, $\Delta = 1$ oraz stan zerowy. Wiązałoby się to z koniecznością wyznaczania dziewięciu wyrazów macierzy sztywności oraz trzech wyrazów kolumny wyrazów wolnych. Współczynniki przy niewiadomych oraz wyrazy wolne układu równań metody przemieszczeń możemy wyznaczyć w inny sposób. Wykorzystamy wzory transformacyjne do wyznaczenia momentów i sił tnących, występujących w przekrojach przywęzłowych. W przypadku, gdyby pręty układu były obciążone obciążeniem ciągłym, siłami skupionymi lub momentami, należałoby zastosować również wzory na momenty i siły tnące wyjściowe. W rozpatrywanym zadaniu mamy do czynienia z obciążeniem błędem montażowym, polegającym na osiadaniu podpory węzła 2. W tym przypadku do wyznaczenia momentów i sił tnących, powstających w stanie zerowym skorzystamy ze wzorów transformacyjnych. Do wymienionych wzorów będziemy podstawiać kąty obrotu węzłów 1 i 2 oraz kąty obrotu cięciw wyznaczone na poniższych rysunkach 5 i 6. W celu określenia

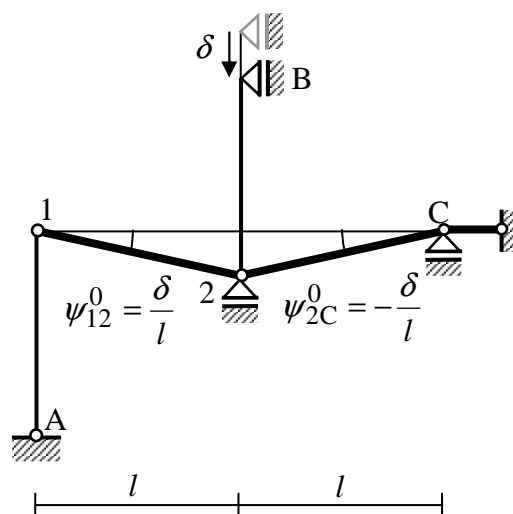
wartości tych kątów zastosujemy łańcuch kinematyczny. Na podstawie planu przemieszczeń wyznaczamy wartości i zwroty kątów obrotu cięciw.

W stanie Δ otrzymujemy kąty obrotu cięciw przedstawione na rysunku 5. Węzły 1, 2 oraz C przemieszczamy o Δ w kierunku poziomym, a następnie blokujemy fikcyjnym więzem.



Rys. 5

W stanie zerowym otrzymujemy kąty obrotu cięciw przedstawione na rysunku 6. Węzły 2 oraz B przemieszczamy o δ do dołu. Wartości tych kątów podstawiamy do wzorów transformacyjnych, wyznaczając w ten sposób momenty i siły tnące wyjściowe.



Rys. 6

$$M_{12}^0 = \frac{3 \cdot 2EI}{l} (-\psi_{12}^0) = \frac{6EI}{l} \left(-\left(\frac{\delta}{l} \right) \right) = -\frac{6EI}{l^2} \delta$$

$$T_{12}^0 = T_{21}^0 = -\frac{3 \cdot 2EI}{l^2} (-\psi_{12}^0) = -\frac{6EI}{l^2} \left(-\left(\frac{\delta}{l} \right) \right) = \frac{6EI}{l^3} \delta$$

$$M_{2C}^0 = \frac{3 \cdot 2EI}{l} (-\psi_{2C}^0) = \frac{6EI}{l} \left(-\left(-\frac{\delta}{l} \right) \right) = \frac{6EI}{l^2} \delta$$

$$T_{2C}^0 = T_{C2}^0 = -\frac{3 \cdot 2EI}{l^2} (-\psi_{2C}^0) = -\frac{6EI}{l^2} \left(-\left(-\frac{\delta}{l} \right) \right) = -\frac{6EI}{l^3} \delta$$

W pozostałych przekrojach przywęzłowych momenty i siły tnące wyjściowe mają wartości zerowe. Korzystając ze wzorów transformacyjnych i wyznaczonych powyżej momentów i sił tnących wyjściowych, wyznaczmy momenty i tnące we wszystkich przekrojach przywęzłowych, uzależniając je od niewiadomych $\varphi_1, \varphi_2, \Delta$.

$$M_{1A} = \frac{2EI}{l}(2\varphi_1 + \varphi_A - 3\psi_{1A}) + M_{1A}^0 = \frac{2EI}{l}\left(2\varphi_1 + 0 - 3\frac{\Delta}{l}\right) + 0 = \frac{2EI}{l}\left(2\varphi_1 - 3\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$M_{A1} = \frac{2EI}{l}(2\varphi_A + \varphi_1 - 3\psi_{1A}) + M_{1A}^0 = \frac{2EI}{l}\left(2 \cdot 0 + \varphi_1 - 3\frac{\Delta}{l}\right) + 0 = \frac{2EI}{l}\left(\varphi_1 - 3\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$T_{1A} = -\frac{6EI}{l^2}(\varphi_1 + \varphi_A - 2\psi_{1A}) + T_{1A}^0 = -\frac{6EI}{l^2}\left(\varphi_1 + 0 - 2\frac{\Delta}{l}\right) + 0 = -\frac{6EI}{l^2}\left(\varphi_1 - 2\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$T_{A1} = -\frac{6EI}{l^2}(\varphi_1 + \varphi_A - 2\psi_{1A}) + T_{A1}^0 = -\frac{6EI}{l^2}\left(\varphi_1 + 0 - 2\frac{\Delta}{l}\right) + 0 = -\frac{6EI}{l^2}\left(\varphi_1 - 2\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$M_{12} = \frac{3 \cdot 2EI}{l}(\varphi_1 - 3\psi_{12}) + M_{12}^0 = \frac{6EI}{l}(\varphi_1 - 0) - \frac{6EI}{l^2}\delta = \frac{6EI}{l}\varphi_1 - \frac{6EI}{l^2}\delta$$

$$T_{12} = -\frac{3 \cdot 2EI}{l^2}(\varphi_1 - 3\psi_{12}) + T_{12}^0 = -\frac{6EI}{l^2}(\varphi_1 - 0) + \frac{6EI}{l^3}\delta = -\frac{6EI}{l^2}\varphi_1 + \frac{6EI}{l^3}\delta$$

$$T_{21} = T_{12} = -\frac{6EI}{l^2}\varphi_1 + \frac{6EI}{l^3}\delta$$

$$M_{2B} = \frac{2EI}{l}(2\varphi_2 + \varphi_B - 3\psi_{2B}) + M_{2B}^0 = \frac{2EI}{l}\left(2\varphi_2 + 0 - 3\left(-\frac{\Delta}{l}\right)\right) + 0 = \frac{2EI}{l}\left(2\varphi_2 + 3\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$M_{B2} = \frac{2EI}{l}(2\varphi_B + \varphi_2 - 3\psi_{2B}) + M_{2B}^0 = \frac{2EI}{l}\left(2 \cdot 0 + \varphi_2 - 3\left(-\frac{\Delta}{l}\right)\right) + 0 = \frac{2EI}{l}\left(\varphi_2 + 3\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$T_{2B} = -\frac{6EI}{l^2}(\varphi_2 + \varphi_B - 2\psi_{2B}) + T_{2B}^0 = -\frac{6EI}{l^2}\left(\varphi_2 + 0 - 2\left(-\frac{\Delta}{l}\right)\right) + 0 = -\frac{6EI}{l^2}\left(\varphi_2 + 2\frac{\Delta}{l}\right)$$

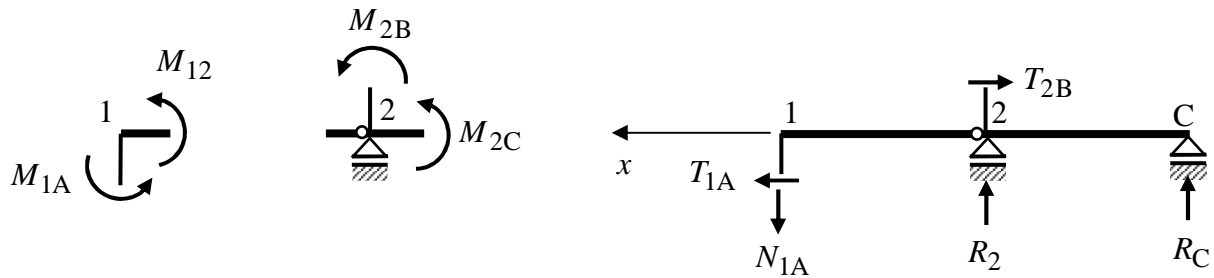
$$T_{B2} = T_{2B} = -\frac{6EI}{l^2}\left(\varphi_2 + 2\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$M_{2C} = \frac{3 \cdot 2EI}{l}(\varphi_2 - 3\psi_{2C}) + M_{2C}^0 = \frac{6EI}{l}(\varphi_2 - 0) + \frac{6EI}{l^2}\delta = \frac{6EI}{l}\varphi_2 + \frac{6EI}{l^2}\delta$$

$$T_{2C} = -\frac{3 \cdot 2EI}{l^2}(\varphi_2 - 3\psi_{2C}) + T_{2C}^0 = -\frac{6EI}{l^2}(\varphi_2 - 0) - \frac{6EI}{l^3}\delta = -\frac{6EI}{l^2}\varphi_2 - \frac{6EI}{l^3}\delta$$

$$T_{C2} = T_{2C} = -\frac{6EI}{l^2} \varphi_2 - \frac{6EI}{l^3} \delta$$

Powyższe zależności podstawiamy do stosownych równań równowagi. Niewiadomymi geometrycznymi są: kąty obrotu węzłów 1 i 2 oraz przesuw rygła ramy. Zapiśmy równania sumy momentów dla węzłów 1 oraz 2, a także równanie rzutów sił na oś poziomą dla części doznającej przesuwu. Zwrot tej osi przyjmujemy przeciwny do zwrotu przesuwu Δ . W przekrojach przywęzłowych narysowane są tylko te siły, które występują w równaniach równowagi.



Rys. 7

$$\begin{aligned} \sum_i M_{i1} = 0 &\Rightarrow M_{1A} + M_{12} = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{l} \left(2\varphi_1 - 3\frac{\Delta}{l} \right) + \frac{6EI}{l} \varphi_1 - \frac{6EI}{l^2} \delta = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 10\frac{EI}{l} \varphi_1 - \frac{6EI}{l^2} \Delta - \frac{6EI}{l^2} \delta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i M_{i2} = 0 &\Rightarrow M_{2B} + M_{2C} = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{l} \left(2\varphi_2 + 3\frac{\Delta}{l} \right) + \frac{6EI}{l} \varphi_2 + \frac{6EI}{l^2} \delta = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 10\frac{EI}{l} \varphi_2 + 6\frac{EI}{l^2} \Delta + \frac{6EI}{l^2} \delta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i P_{ix12C} = 0 &\Rightarrow T_{1A} - T_{2B} = 0 \Rightarrow -\frac{6EI}{l^2} \left(\varphi_1 - 2\frac{\Delta}{l} \right) - \left(-\frac{6EI}{l^2} \left(\varphi_2 + 2\frac{\Delta}{l} \right) \right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -6\frac{EI}{l^2} \varphi_1 + 6\frac{EI}{l^2} \varphi_2 + 24\frac{EI}{l^3} \Delta = 0 \end{aligned}$$

Powyższe równania zapiśmy w postaci macierzowej.

$$\begin{bmatrix} 10\frac{EI}{l} & 0\frac{EI}{l} & -6\frac{EI}{l^2} \\ 0\frac{EI}{l} & 10\frac{EI}{l} & 6\frac{EI}{l^2} \\ -6\frac{EI}{l^2} & 6\frac{EI}{l^2} & 24\frac{EI}{l^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -6\frac{EI}{l^2} \delta \\ 6\frac{EI}{l^2} \delta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Macierz współczynników przy niewiadomych jest macierzą sztywności. Jest ona symetryczna.

Wyrazy na głównej przekątnej są dodatnie. W celu rozwiązania układu równań wyznaczmy macierz odwrotną.

$$\begin{bmatrix} 10\frac{EI}{l} & 0\frac{EI}{l} & -6\frac{EI}{l^2} \\ 0\frac{EI}{l} & 10\frac{EI}{l} & 6\frac{EI}{l^2} \\ -6\frac{EI}{l^2} & 6\frac{EI}{l^2} & 24\frac{EI}{l^3} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{17}{140}\frac{l}{EI} & -\frac{3}{140}\frac{l}{EI} & \frac{1}{28}\frac{l^2}{EI} \\ -\frac{3}{140}\frac{l}{EI} & \frac{17}{140}\frac{l}{EI} & -\frac{1}{28}\frac{l^2}{EI} \\ \frac{1}{28}\frac{l^2}{EI} & -\frac{1}{28}\frac{l^2}{EI} & \frac{5}{84}\frac{l^3}{EI} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań ma postać

$$\begin{cases} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \Delta \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{17}{140}\frac{l}{EI} & -\frac{3}{140}\frac{l}{EI} & \frac{1}{28}\frac{l^2}{EI} \\ -\frac{3}{140}\frac{l}{EI} & \frac{17}{140}\frac{l}{EI} & -\frac{1}{28}\frac{l^2}{EI} \\ \frac{1}{28}\frac{l^2}{EI} & -\frac{1}{28}\frac{l^2}{EI} & \frac{5}{84}\frac{l^3}{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} -\left(-6\frac{EI}{l^2}\delta\right) \\ -\left(6\frac{EI}{l^2}\delta\right) \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{6}{7}\frac{\delta}{l} \\ \frac{6}{7}\frac{\delta}{l} \\ \frac{3}{7}\delta \end{cases}$$

Momenty i siły tnące w przekrojach przywęzłowych możemy wyznaczyć korzystając z zasady superpozycji.

$$M_{1A} = \frac{2EI}{l} \left(2\varphi_1 + 0 - 3\frac{\Delta}{l} \right) + M_{1A}^0 = \frac{2EI}{l} \left(2 \cdot \frac{6}{7}\frac{\delta}{l} - \frac{3}{l} \cdot \frac{3}{7}\delta \right) + 0 = \frac{6}{7}\frac{EI}{l^2} \delta$$

$$M_{A1} = \frac{2EI}{l} \left(2 \cdot 0 + \varphi_1 - 3\frac{\Delta}{l} \right) + M_{A1}^0 = \frac{2EI}{l} \left(\frac{6}{7}\frac{\delta}{l} - \frac{3}{l} \cdot \frac{3}{7}\delta \right) + 0 = -\frac{6}{7}\frac{EI}{l^2} \delta$$

$$T_{1A} = -\frac{6EI}{l^2} \left(\varphi_1 + 0 - 2\frac{\Delta}{l} \right) + T_{1A}^0 = -\frac{6EI}{l^2} \left(\frac{6}{7}\frac{\delta}{l} - \frac{2}{l} \cdot \frac{3}{7}\delta \right) + 0 = 0$$

$$T_{A1} = T_{1A} = 0$$

$$M_{12} = \frac{6EI}{l} (\varphi_1 - 0) + M_{12}^0 = \frac{6EI}{l} \left(\frac{6}{7}\frac{\delta}{l} - 0 \right) - \frac{6EI}{l^2} \delta = \frac{36}{7}\frac{EI}{l} \frac{\delta}{l} - \frac{6EI}{l^2} \delta = -\frac{6}{7}\frac{EI}{l^2} \delta$$

$$T_{12} = -\frac{6EI}{l^2} (\varphi_1 - 0) + T_{12}^0 = -\frac{6EI}{l^2} \left(\frac{6}{7}\frac{\delta}{l} - 0 \right) + \frac{6EI}{l^3} \delta = \frac{6}{7}\frac{EI}{l^3} \delta$$

$$T_{21} = T_{12} = \frac{6}{7}\frac{EI}{l^3} \delta$$

$$M_{2B} = \frac{2EI}{l} \left(2\varphi_2 + 0 - 3\left(-\frac{\Delta}{l}\right) \right) + M_{2B}^0 = \frac{2EI}{l} \left(2\left(-\frac{6}{7}\frac{\delta}{l}\right) + \frac{3}{l} \cdot \frac{3}{7}\delta \right) + 0 = -\frac{6}{7}\frac{EI}{l^2} \delta$$

$$M_{B2} = \frac{2EI}{l} \left(2 \cdot 0 + \varphi_2 - 3 \left(-\frac{\Delta}{l} \right) \right) + M_{2B}^0 = \frac{2EI}{l} \left(-\frac{6\delta}{7l} + \frac{3}{l} \frac{3}{7} \delta \right) + 0 = \frac{6EI}{7l^2} \delta$$

$$T_{2B} = -\frac{6EI}{l^2} \left(\varphi_2 + 0 - 2 \left(-\frac{\Delta}{l} \right) \right) + T_{2B}^0 = -\frac{6EI}{l^2} \left(-\frac{6\delta}{7l} + \frac{2}{l} \frac{3}{7} \delta \right) + 0 = 0$$

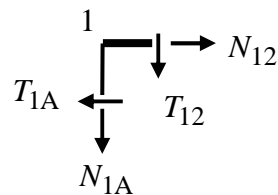
$$T_{B2} = T_{2B} = 0$$

$$M_{2C} = \frac{6EI}{l} (\varphi_2 - 0) + M_{2C}^0 = \frac{6EI}{l} \left(-\frac{6\delta}{7l} \right) + \frac{6EI}{l^2} \delta = \frac{6EI}{7l^2} \delta$$

$$T_{2C} = -\frac{6EI}{l^2} (\varphi_2 - 0) + T_{2C}^0 = -\frac{6EI}{l^2} \left(-\frac{6\delta}{7l} \right) - \frac{6EI}{l^3} \delta = -\frac{6EI}{7l^3} \delta$$

$$T_{C2} = T_{2C} = -\frac{6EI}{7l^3} \delta$$

Ze względu na rodzaj podpór w punktach B i C możemy stwierdzić, że w prętach 2B oraz 2C wartości sił normalnych są zerowe. W celu wyznaczenia sił normalnych w pozostałych dwóch prętach należy wykorzystać równania równowagi rzutów sił dla węzła 1. W przekrojach przywęzłowych narysowane są tylko te siły, które występują w równaniach równowagi.

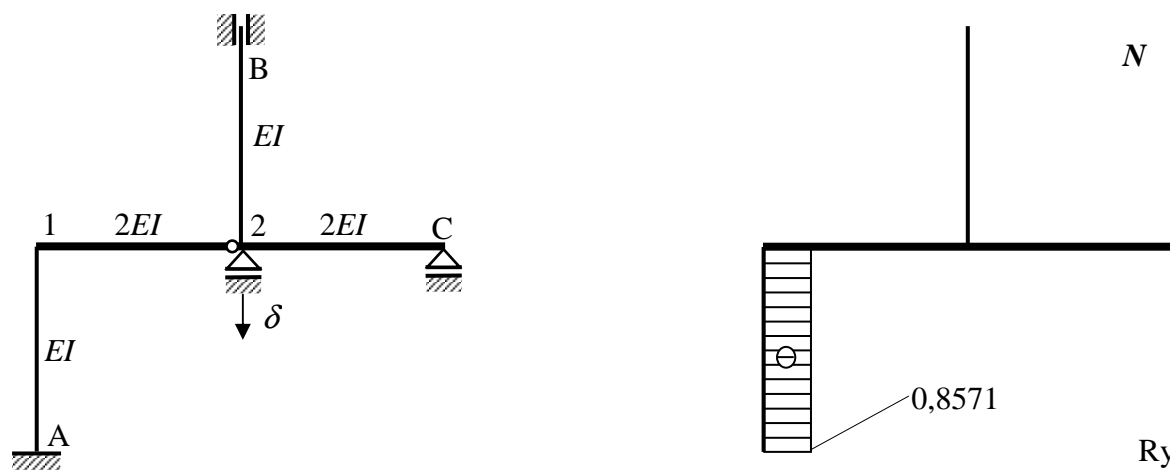


Rys. 8

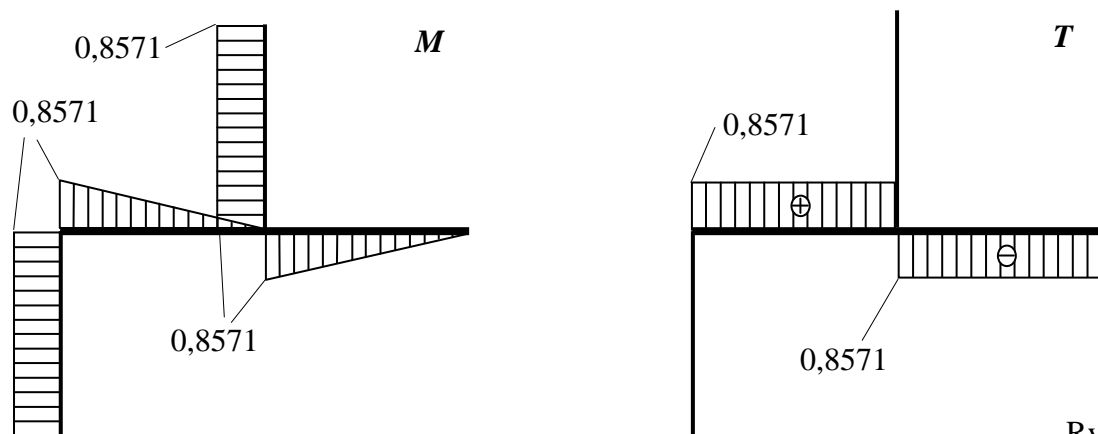
$$\sum_i P_{ix1} = 0 \Rightarrow N_{12} - T_{1A} = 0 \Rightarrow N_{12} = T_{1A} \Rightarrow N_{12} = 0$$

$$\sum_i P_{iy1} = 0 \Rightarrow -N_{1A} - T_{12} = 0 \Rightarrow N_{1A} = -T_{12} \Rightarrow N_{1A} = -\left(\frac{6EI}{7l^3} \delta \right) = -\frac{6EI}{7l^3} \delta$$

Wykresy sił przekrojowych



Rys. 9



Rys. 10

Rzędne wykresów siły normalnej i tnącej mnożymy przez $\frac{EI}{l^3} \delta$.

Rzędne wykresu momentu gnącego mnożymy przez $\frac{EI}{l^2} \delta$.