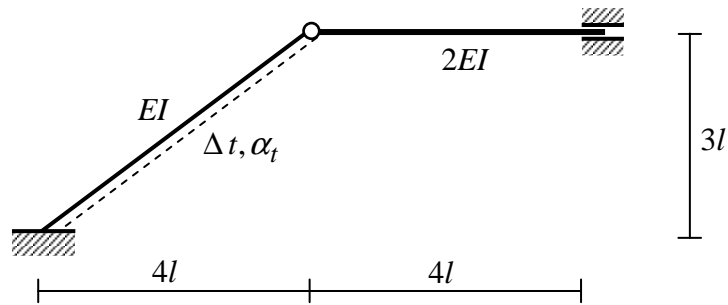


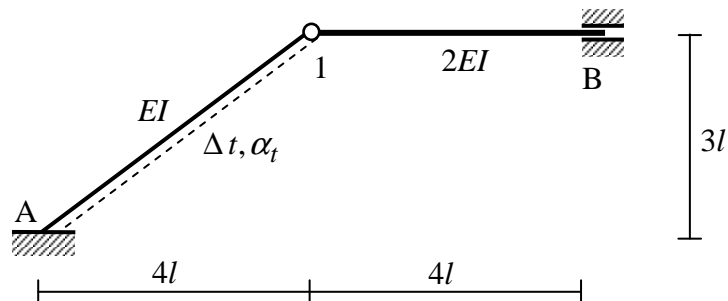
Przykład 9.5. Rama obciążona termicznie

Polecenie: Sporządzić wykresy sił przekrojowych dla poniższej ramy korzystając z metody przemieszczeń



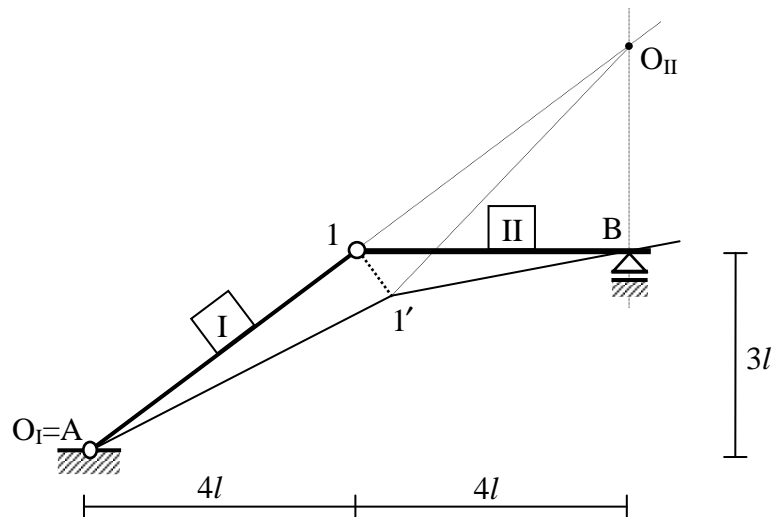
Rys. 1

Wprowadzamy oznaczenia podpór i połączenia przegubowego. W powyższej ramie nie występuje węzeł sztywny.



Rys. 2

W celu wyznaczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności musimy określić liczbę stopni swobody łańcucha kinematycznego, utworzonego z rozpatrywanej ramy. Wprowadzamy połączenia przegubowe w utwierdzeniu A i w tulei B.



Rys. 3

Liczbę stopni swobody łańcucha kinematycznego wyznaczymy ze wzoru

$$l_s = 3 \cdot t - w_w - w_z = 3 \cdot 2 - 2 - 3 = 6 - 5 = 1$$

gdzie:

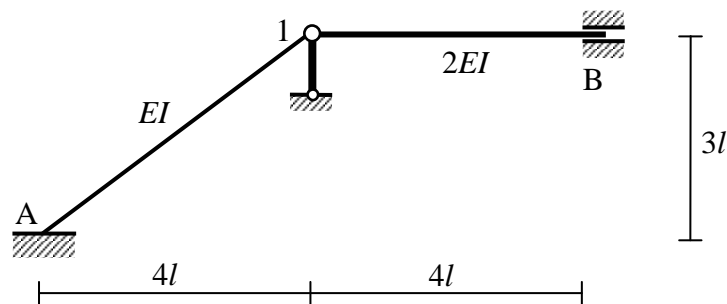
t - liczba tarcz (prętów),

w_w - liczba więzów wewnętrznych,

w_z - liczba więzów zewnętrznych.

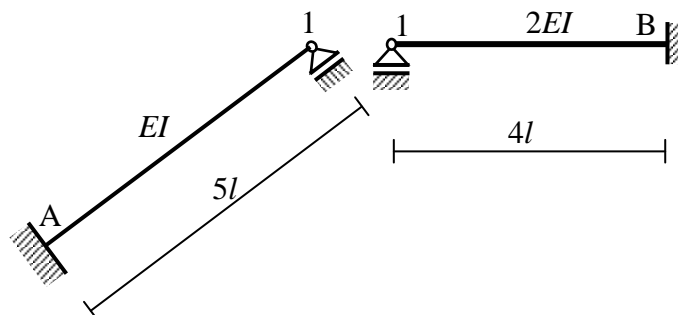
Wystarczy wprowadzić jeden dodatkowy więź, żeby poniższy łańcuch kinematyczny stał się układem nieprzesuwnym. Wyznaczamy środek obrotu tarczy II w punkcie przecięcia prostej A1 i prostej pionowej poprowadzonej przez punkt B. Punkt ten oznaczamy jako O_{II} . Promienie O_I1 i $O_{II}1$ mają tę samą długość. Z planu przemieszczeń wynika, że kąty obrotu obu prętów mają taką samą wartość oraz przeciwne zwroty. Połączenie przegubowe 1 przemieszcza się do punktu $1'$.

Na rysunku 4 znajduje się układ geometrycznie wyznaczalny.



Rys. 4

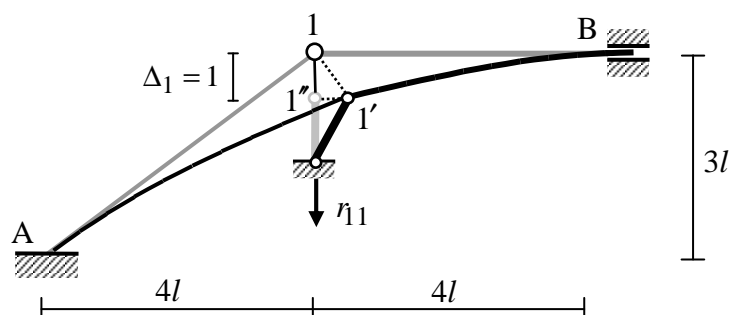
Na podstawie układu geometrycznie wyznaczalnego ustalamy schematy dla poszczególnych prętów ramy. Oba pręty podlegające zginaniu (1A i 1B) mają takie same schematy. Są to pręty na jednym końcu utwierdzone, a na drugim podparte przegubowo. Różnią się długością i sztywnością zginania.



Rys. 5

Stan $\Delta_1 = 1$

Węzeł przegubowy 1 przemieszczamy w położenie $1'$, a następnie blokujemy fikcyjnym więzem, w którym powstaje reakcja r_{11} . Składowa pionowa przemieszczenia $\overline{11'}$ (oznaczona na rysunku 6 jako $\overline{11''}$) równa jest $\Delta_1 = 1$.



Rys. 6

Kąt obrotu cięciwy pręta 1B wynosi

$$\psi_{1B}^1 = -\frac{1}{4l}$$

Z planu przemieszczeń na rysunku 3 wynika, że kąt obrotu cięciwy pręta 1A ma tę samą wartość bezwzględną i przeciwny znak.

$$\psi_{1A}^1 = -\psi_{1B}^1 = -\left(-\frac{1}{4l}\right) = \frac{1}{4l}$$

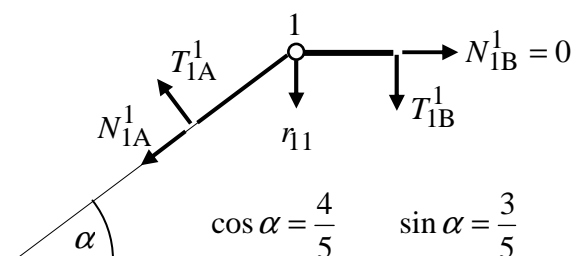
Taki sam wynik otrzymalibyśmy dzieląc długość odcinka $\overline{11'}$ przez $5l$. Ze wzorów transformacyjnych wyznaczamy momenty i siły tnące w przekrojach przywęzłowych, a następnie reakcję fikcyjnego więzu r_{11} .

$$M_{A1}^1 = \frac{3 \cdot EI}{5l} (\varphi_A^1 - \psi_{1A}^1) = \frac{3 \cdot EI}{5l} \left(0 - \frac{1}{4l}\right) = -\frac{3}{20} \cdot \frac{EI}{l^2}$$

$$T_{A1}^1 = T_{1A}^1 = -\frac{3 \cdot EI}{(5l)^2} (\varphi_A^1 - \psi_{1A}^1) = -\frac{3 \cdot EI}{(5l)^2} \left(0 - \frac{1}{4l}\right) = \frac{3}{100} \cdot \frac{EI}{l^3}$$

$$M_{B1}^1 = \frac{3 \cdot 2EI}{4l} (\varphi_B^1 - \psi_{1B}^1) = \frac{3 \cdot 2EI}{4l} \left(0 - \left(-\frac{1}{4l}\right)\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{EI}{l^2}$$

$$T_{B1}^1 = T_{1B}^1 = -\frac{3 \cdot 2EI}{(4l)^2} (\varphi_B^1 - \psi_{1B}^1) = -\frac{3 \cdot 2EI}{(4l)^2} \left(0 - \left(-\frac{1}{4l}\right)\right) = -\frac{3}{32} \cdot \frac{EI}{l^3}$$



Rys. 7

$$\sum_i P_{ix1}^1 = 0: -T_{1A}^1 \cdot \sin \alpha - N_{1A}^1 \cdot \cos \alpha + N_{1B}^1 = 0 \Rightarrow -\frac{3}{100} \cdot \frac{EI}{l^3} \cdot \frac{3}{5} - N_{1A}^1 \cdot \frac{4}{5} + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{1A}^1 = -\frac{9}{400} \cdot \frac{EI}{l^3}$$

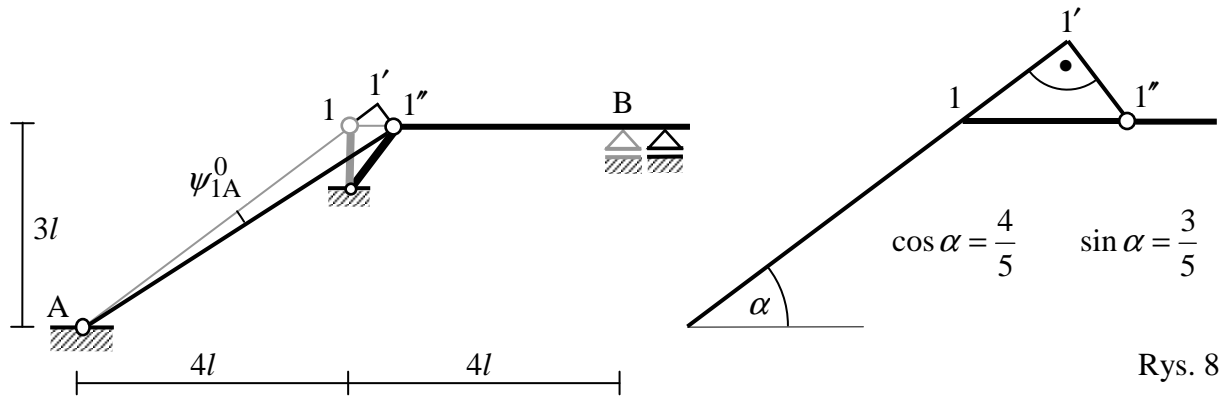
$$\sum_i P_{iy1}^1 = 0: T_{1A}^1 \cdot \cos \alpha - N_{1A}^1 \cdot \sin \alpha - T_{1B}^1 - r_{11} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{11} = T_{1A}^1 \cdot \cos \alpha - N_{1A}^1 \cdot \sin \alpha - T_{1B}^1 = \frac{3}{100} \cdot \frac{EI}{l^3} \cdot \frac{4}{5} - \left(-\frac{9}{400} \cdot \frac{EI}{l^3}\right) \cdot \frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{32} \cdot \frac{EI}{l^3}\right) =$$

$$= \frac{21}{160} \cdot \frac{EI}{l^3} \Rightarrow r_{11} = \frac{21}{160} \cdot \frac{EI}{l^3}$$

Stan zerowy

W układzie geometrycznie wyznaczalnym, który poddany jest działaniu obciążenia termicznego obliczymy wartość reakcji fikcyjnego więzu r_{10} . W łańcuchu kinematycznym z fikcyjną podporą wyznaczamy kąty obrotu cięciw pręta 1A i 1B. Obciążenie termiczne powoduje wydłużenie pręta 1A. Na rysunku 8 jest to odcinek $\overline{11'}$. Fikcyjny więz umożliwia przemieszczenie węzła przegubowego 1 w kierunku poziomym. Wartość tego przemieszczenia jest równa długości odcinka $\overline{11''}$. Kąt między odcinkami $\overline{11'}$ i $\overline{11''}$ jest kątem prostym.



Rys. 8

Wyznaczamy wydłużenie pręta 1A.

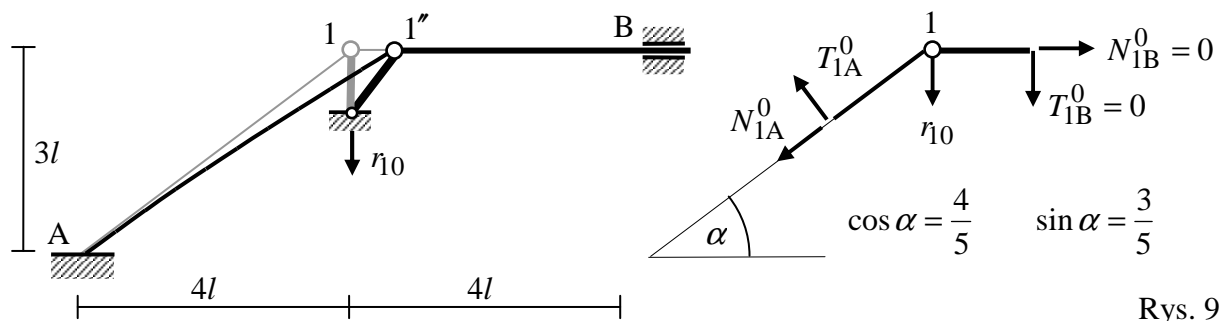
$$\Delta l_{1A}^0 = \overline{11'} = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot 5l = 5 \alpha_t \Delta t l$$

Długość odcinka $\overline{1'1''}$ wynosi

$$\frac{\overline{1'1''}}{\overline{11'}} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \overline{1'1''} = \overline{11'} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 5 \alpha_t \Delta t l \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 5 \alpha_t \Delta t l \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} \alpha_t \Delta t l$$

Kąty obrotu cięciw prętów 1A i 1B w stanie zerowym mają wartości

$$\psi_{1A}^0 = \frac{\overline{1'1''}}{5l} = \frac{\frac{15}{4} \alpha_t \Delta t l}{5l} = \frac{3}{4} \alpha_t \Delta t, \quad \psi_{1B}^0 = 0$$



Rys. 9

$$M_{A1}^0 = \frac{3 \cdot EI}{5l} (\varphi_A^0 - \psi_{1A}^0) = \frac{3 \cdot EI}{5l} \left(0 - \frac{3}{4} \alpha_t \Delta t \right) = -\frac{9}{20} \cdot \frac{EI}{l} \alpha_t \Delta t$$

$$T_{A1}^0 = T_{1A}^0 = -\frac{3 \cdot EI}{(5l)^2} (\varphi_A^0 - \psi_{1A}^0) = -\frac{3 \cdot EI}{(5l)^2} \left(0 - \frac{3}{4} \alpha_t \Delta t \right) = \frac{9}{100} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t$$

$$M_{B1}^0 = \frac{3 \cdot 2EI}{4l} (\varphi_B^0 - \psi_{1B}^0) = \frac{3 \cdot 2EI}{4l} (0 - 0) = 0$$

$$T_{B1}^0 = T_{1B}^0 = -\frac{3 \cdot 2EI}{(4l)^2} (\varphi_B^0 - \psi_{1B}^0) = -\frac{3 \cdot 2EI}{(4l)^2} (0 - 0) = 0$$

$$\sum_i P_{ix1}^0 = 0: -T_{1A}^0 \cdot \sin \alpha - N_{1A}^0 \cdot \cos \alpha + N_{1B}^0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{100} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t \cdot \frac{3}{5} - N_{1A}^0 \cdot \frac{4}{5} + 0 = 0 \Rightarrow N_{1A}^0 = -\frac{27}{400} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t$$

$$\sum_i P_{iy1}^0 = 0: T_{1A}^0 \cdot \cos \alpha - N_{1A}^0 \cdot \sin \alpha - T_{1B}^0 - r_{10} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{10} = T_{1A}^0 \cdot \cos \alpha - N_{1A}^0 \cdot \sin \alpha - T_{1B}^0 = \frac{9}{100} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t \cdot \frac{4}{5} - \left(-\frac{27}{400} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t \right) \cdot \frac{3}{5} - 0 =$$

$$= \frac{9}{80} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t \Rightarrow r_{10} = \frac{9}{80} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t$$

Korzystając z zasady superpozycji otrzymamy następujące równanie metody przemieszczeń

$$r_{11} \cdot \Delta_1 + r_{10} = 0$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości reakcji fikcyjnej podpory dostajemy

$$\frac{21}{160} \frac{EI}{l^3} \cdot \Delta_1 + \frac{9}{80} \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t = 0 \Rightarrow \Delta_1 = -\frac{6}{7} \cdot \alpha_t \Delta t l$$

Momenty i siły tnące w przekrojach przywęzłowych możemy wyznaczyć korzystając z zasady superpozycji.

$$M_{A1} = M_{A1}^1 \cdot \Delta_1 + M_{A1}^0 = -\frac{3}{20} \cdot \frac{EI}{l^2} \cdot \left(-\frac{6}{7} \alpha_t \Delta t l \right) + \left(-\frac{9}{20} \cdot \frac{EI}{l} \alpha_t \Delta t \right) = -\frac{9}{28} \cdot \frac{EI}{l} \alpha_t \Delta t \cong$$

$$\cong -0,3214 \cdot \frac{EI}{l} \alpha_t \Delta t$$

$$M_{B1} = M_{B1}^1 \cdot \Delta_1 + M_{B1}^0 = \frac{3}{8} \cdot \frac{EI}{l^2} \cdot \left(-\frac{6}{7} \alpha_t \Delta t l \right) + 0 = -\frac{9}{28} \cdot \frac{EI}{l} \alpha_t \Delta t \cong -0,3214 \cdot \frac{EI}{l} \alpha_t \Delta t$$

$$T_{A1} = T_{A1}^1 \cdot \Delta_1 + T_{A1}^0 = \frac{3}{100} \cdot \frac{EI}{l^3} \cdot \left(-\frac{6}{7} \alpha_t \Delta t l \right) + \frac{9}{100} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t = \frac{9}{140} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t \cong$$

$$\cong 0,0643 \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t$$

$$T_{1A} = T_{A1} = \frac{9}{140} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t \cong 0,0643 \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t$$

$$T_{B1} = T_{B1}^1 \cdot \Delta_1 + T_{B1}^0 = -\frac{3}{32} \cdot \frac{EI}{l^3} \cdot \left(-\frac{6}{7} \alpha_t \Delta t l\right) + 0 = \frac{9}{112} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t \cong 0,0804 \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t$$

$$T_{1B} = T_{B1} = \frac{9}{112} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t \cong 0,0804 \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t$$

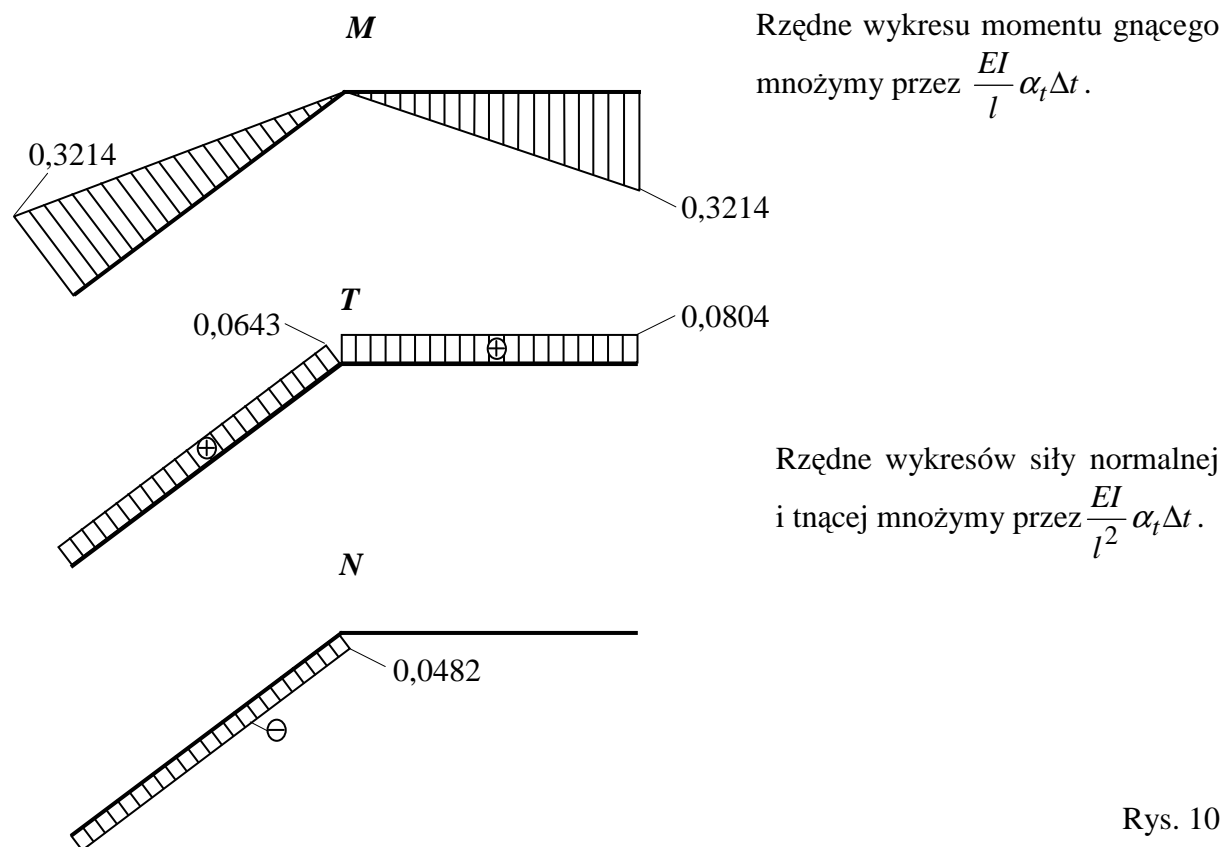
$$N_{1A} = N_{1A}^1 \cdot \Delta_1 + N_{1A}^0 = -\frac{9}{400} \cdot \frac{EI}{l^3} \cdot \left(-\frac{6}{7} \alpha_t \Delta t l\right) - \frac{27}{400} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t = -\frac{27}{560} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t \cong -0,0482 \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t$$

$$N_{A1} = N_{1A} = -\frac{27}{560} \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t \cong -0,0482 \cdot \frac{EI}{l^2} \alpha_t \Delta t$$

$$N_{1B} = N_{1B}^1 \cdot \Delta_1 + N_{1B}^0 = 0 \cdot \left(-\frac{6}{7} \alpha_t \Delta t l\right) + 0 = 0$$

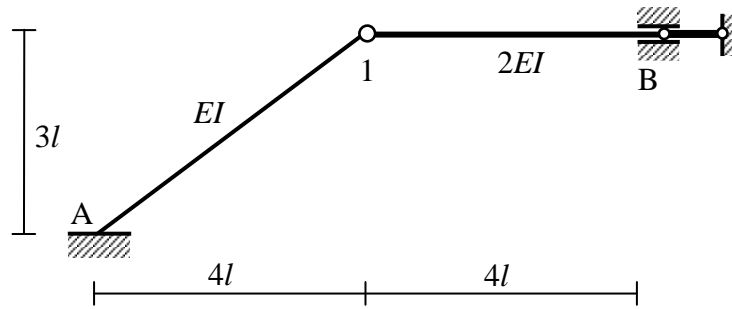
$$N_{B1} = N_{1B} = 0$$

Wykresy sił przekrojowych



Rys. 10

Czytelnika zachęca się do rozwiązania powyższego zadania przyjmując inny układ geometrycznie niewyznaczalny. Propozycja takiego układu znajduje się na następnej stronie.



Rys. 4

Korzystnym byłoby również, w celu nabywania doświadczenia, rozwiązanie omawianego zadania z wykorzystaniem metody sił. Stopień statycznej i geometrycznej niewyznaczalności rozważanego układu jest taki sam, ale można też porównać nakład pracy rachunkowej związany z rozwiązaniem zadania obiema metodami.