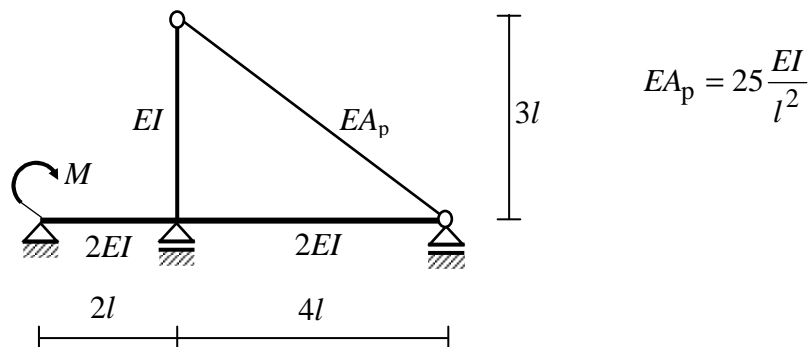


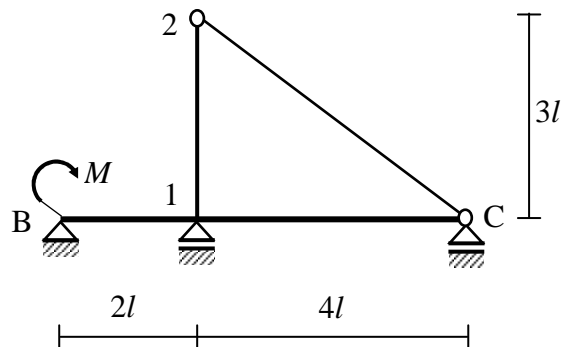
Przykład 9.4. Rama ze ściągiem

Polecenie: Sporządzić wykresy sił przekrojowych dla poniższej ramy korzystając z metody przemieszczeń



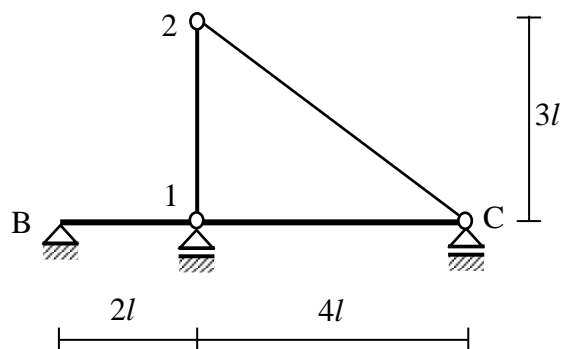
Rys. 1

Wprowadzamy oznaczenia podpór i węzłów (sztywnego i przegubowego).



Rys. 2

W celu wyznaczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu musimy określić liczbę stopni swobody łańcucha kinematycznego, utworzonego z rozpatrywanej ramy. Wprowadzamy połączenie przegubowe w miejsce węzła sztywnego 1.



Rys. 3

W poprzednich przykładach (Przykłady 9.1, 9.2 oraz 9.3) liczbę stopni swobody łańcucha kinematycznego wyznaczaliśmy ze wzoru

$$l_s = 3 \cdot t - w_w - w_z$$

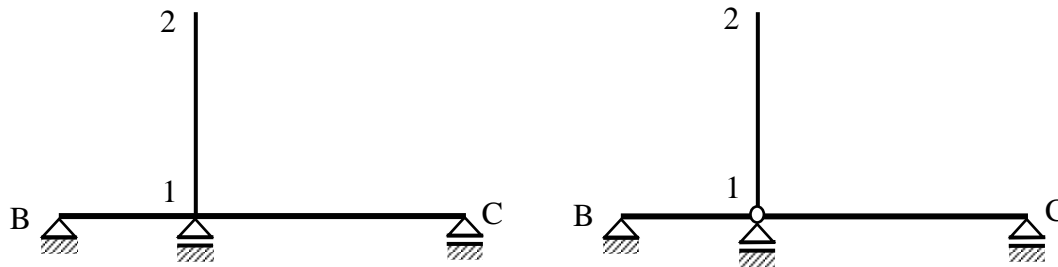
gdzie:

- t - liczba tarcz (prętów),
- w_w - liczba więzów wewnętrznych,
- w_z - liczba więzów zewnętrznych.

Analizując budowę łańcucha kinematycznego można stwierdzić, że rozpatrywany układ jest geometrycznie niezmienny.

$$l_s = 3 \cdot 4 - (1 \cdot 4 + 2 \cdot 2) - (2 + 1 + 1) = 12 - 8 - 4 = 0$$

Potwierdza to powyższy wynik. Jednakże w przypadku występowania w układzie pręta, w którym działa wyłącznie siła normalna, nie możemy pominąć jego ścisłości. Określenie liczby stopni swobody wykonamy dla układu bez pręta dwuprzegubowego C2, gdyż nie odbiera on możliwości wystąpienia poziomego przemieszczenia przegubu 2. Z prawej strony rysunku 4 znajduje się łańcuch kinematyczny.



Rys. 4

Liczbę stopni swobody łańcucha kinematycznego możemy wyznaczyć ze wzoru

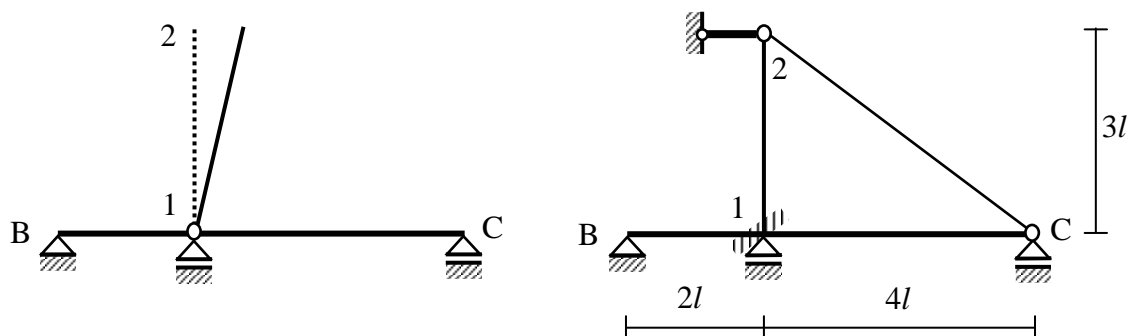
$$l_s = 3 \cdot t - w_w - w_z = 3 \cdot 3 - 4 - 4 = 9 - 4 - 4 = 1$$

Liczba więzów wewnętrznych jest równa liczbie oddziaływań w połączeniach podukładów, natomiast liczba więzów zewnętrznych jest równa liczbie reakcji podporowych. Liczba stopni swobody łańcucha kinematycznego odpowiada liczbie niezależnych przesuwów rozpatrywanej ramy.

Stopień geometrycznej niewyznaczalności układu n_g obliczamy jako sumę liczby węzłów, które mogą doznać obrotu oraz liczby niezależnych przesuwów.

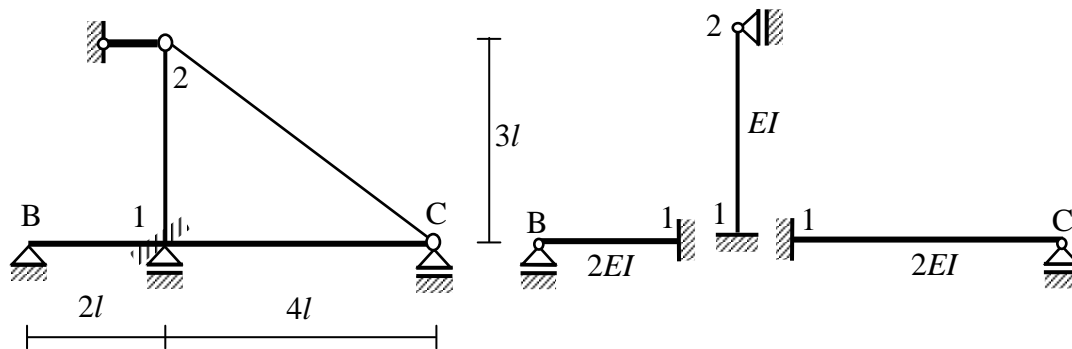
$$n_g = 1 + 1 = 2$$

Tworząc układ geometrycznie wyznaczalny wprowadzamy więzy uniemożliwiające wystąpienie w układzie obrotu węzła 1 oraz przesuwu przegubu 2.



Rys. 5

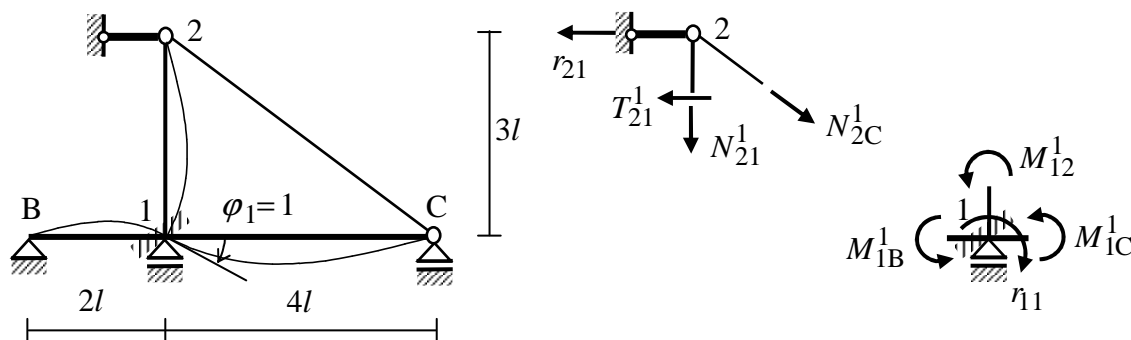
Na rysunku 5 przedstawiony jest plan przemieszczeń dla łańcucha kinematycznego oraz układ geometrycznie wyznaczalny. Na podstawie układu geometrycznie wyznaczalnego ustalamy schematy dla poszczególnych prętów ramy. Wszystkie trzy pręty podlegające zginaniu (1B, 1C i 12) mają takie same schematy. Są to pręty na jednym końcu utwierdzone, a na drugim podparte przegubowo. Różnią się długością i sztywnością zginania.



Rys. 6

Stan $\varphi_1 = 1$

Obracamy węzeł 1 o kąt $\varphi_1 = 1$ zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, a następnie blokujemy fikcyjnym więzem, w którym powstaje reakcja r_{11} . W drugim więzie występuje reakcja r_{21} .



Rys. 7

W przekrojach przywęzłowych 12, 1B i 1C powstają momenty oraz siły tnące, których wartości wyznaczamy ze wzorów transformacyjnych.

$$M_{1B}^1 = \frac{3 \cdot 2EI}{2l} (1) = \frac{3EI}{l}$$

$$T_{1B}^1 = T_{B1}^1 = -\frac{3 \cdot 2EI}{(2l)^2} (1) = -\frac{3EI}{2l^2}$$

$$M_{1C}^1 = \frac{3 \cdot 2EI}{4l} (1) = \frac{3EI}{2l}$$

$$T_{1C}^1 = T_{C1}^1 = -\frac{3 \cdot 2EI}{(4l)^2} (1) = -\frac{3EI}{8l^2}$$

$$M_{12}^1 = \frac{3EI}{3l} (1) = \frac{EI}{l}$$

$$T_{12}^1 = T_{21}^1 = -\frac{3EI}{(3l)^2} (1) = -\frac{EI}{3l^2}$$

Z równania równowagi sumy momentów dla węzła 1 wyznaczamy reakcję r_{11} w miejscu fikcyjnego więzu, natomiast wartość reakcji r_{21} obliczamy z równania sumy rzutów na oś

poziomą dla węzła przegubowego 2. Na rysunku 7 po prawej stronie w przekrojach przywęzłowych zaznaczone są tylko momenty, ponieważ tylko one występują w poniższym równaniu równowagi.

$$\sum_i M_{i1}^1 = 0: M_{1B}^1 + M_{1C}^1 + M_{12}^1 - r_{11} = 0 \Rightarrow r_{11} = M_{1B}^1 + M_{1C}^1 + M_{12}^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{11} = \frac{EI}{l} \left(3 + \frac{3}{2} + 1 \right) = \frac{11}{2} \cdot \frac{EI}{l}$$

Przed obliczeniem wartości reakcji r_{21} należy wyznaczyć długość pręta 2C oraz siłę normalną w tym pręcie. W stanie $\varphi_1 = 1$ węzły przegubowe 2 i C nie doznają przemieszczeń. Oznacza to, że wydłużenie pręta 2C jest zerowe.

$$l_{2C} = \sqrt{(4l)^2 + (3l)^2} = 5l$$

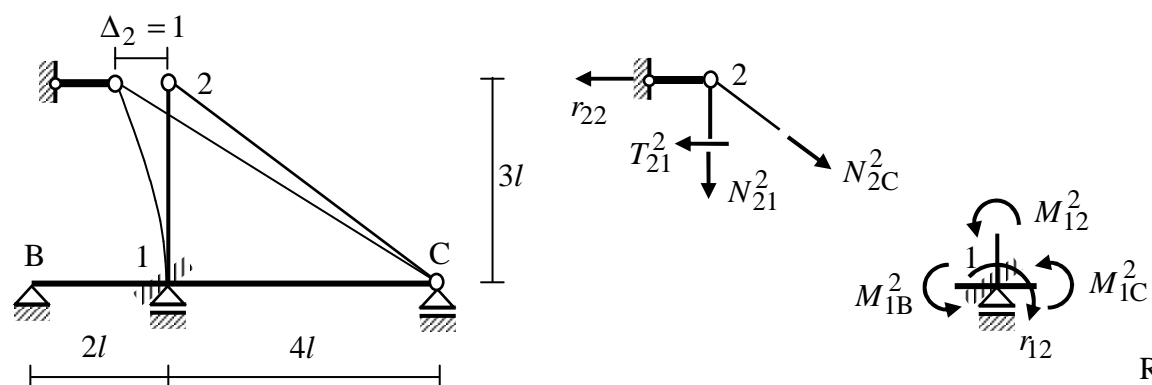
$$\Delta l_{2C}^1 = 0 \Rightarrow \Delta l_{2C}^1 = \frac{N_{2C}^1 \cdot 5l}{EA_p} = 0 \Rightarrow N_{2C}^1 = 0$$

Można już wyznaczyć reakcję drugiego fikcyjnego więzu.

$$\sum_i P_{ix2}^1 = 0: -T_{21}^1 - r_{21} = 0 \Rightarrow r_{21} = -T_{21}^1 \Rightarrow r_{21} = -\left(-\frac{EI}{3l^2}\right) \Rightarrow r_{21} = \frac{1}{3} \cdot \frac{EI}{l^2}$$

Stan $\Delta_2 = 1$

Przemieszczamy węzeł przegubowy 2 o kąt $\Delta_2 = 1$ w lewo (zwrot zgodny ze zwrotem r_{22}), a następnie blokujemy fikcyjnym więzem, w którym powstaje reakcja r_{22} . W więzie blokującym obrót węzła 1 występuje reakcja r_{12} .



Rys. 8

W przekrojach przywęzłowych 1B i 1C momenty oraz siły tnące mają wartości zerowe. Jedynie w pręcie 12 występują niezerowe wartości momentu i sił tnących. Wyznaczamy ich wartości korzystając ze wzorów transformacyjnych. Należy zauważyć, że kąt obrotu cięciwy pręta 12 ma wartość ujemną.

$$M_{1B}^2 = M_{1C}^2 = 0$$

$$T_{1B}^2 = T_{B1}^2 = T_{1C}^2 = T_{C1}^2 = 0$$

$$M_{12}^2 = \frac{3EI}{3l} \left(- \left(- \frac{\Delta_2}{3l} \right) \right) = \frac{EI}{3l^2} \cdot \Delta_2 = \frac{EI}{3l^2} \cdot 1 = \frac{EI}{3l^2}$$

$$T_{12}^2 = T_{21}^2 = - \frac{3EI}{(3l)^2} \left(- \left(- \frac{\Delta_2}{3l} \right) \right) = - \frac{3EI}{9l^2} \cdot \frac{\Delta_2}{3l} = - \frac{EI}{9l^3} \cdot \Delta_2 = - \frac{EI}{9l^3} \cdot 1 = - \frac{EI}{9l^3}$$

Obliczamy reakcje fikcyjnych więzów.

$$\sum_i M_{i1}^2 = 0: M_{1B}^2 + M_{1C}^2 + M_{12}^2 - r_{12} = 0 \Rightarrow r_{12} = M_{1B}^2 + M_{1C}^2 + M_{12}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{12} = \frac{EI}{l^2} \left(0 + 0 + \frac{1}{3} \right) = \frac{EI}{3l^2}$$

W stanie $\Delta_2 = 1$ pręt 2C wydłuża się. Wyznamy wydłużenie tego pręta, a następnie siłę N_{2C}^2 .

$$\Delta l_{2C}^2 = \Delta_2 \cdot \frac{4}{5} = 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\Delta l_{2C}^2 = \frac{N_{2C}^2 \cdot l_{2C}}{EA_p} \Rightarrow N_{2C}^2 = \Delta l_{2C}^2 \cdot \frac{EA_p}{l_{2C}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{EA_p}{5l} = \frac{4}{25} \cdot \frac{EA_p}{l}$$

Uwzględnimy zależność między sztywnością ściskania i sztywnością zginania.

$$EA_p = 25 \frac{EI}{l^2} \Rightarrow N_{2C}^2 = \frac{4}{25} \cdot \frac{EA_p}{l} = \frac{4}{25} \cdot 25 \frac{EI}{l^3} \Rightarrow N_{2C}^2 = 4 \frac{EI}{l^3}$$

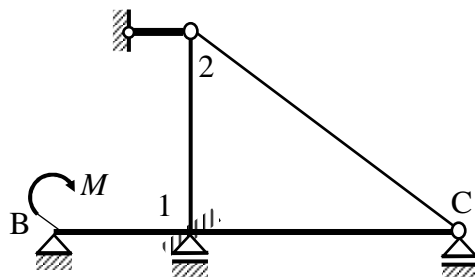
Po wyznaczeniu siły w pręcie 2C w stanie $\Delta_2 = 1$ możemy wyznaczyć reakcję r_{22} .

$$\sum_i P_{ix2}^2 = 0: -T_{21}^2 - r_{22} + \frac{4}{5} N_{2C}^2 = 0 \Rightarrow r_{22} = -T_{21}^2 + \frac{4}{5} N_{2C}^2 \Rightarrow$$

$$r_{22} = - \left(- \frac{EI}{9l^3} \right) + \frac{4}{5} N_{2C}^2 = \frac{EI}{9l^3} + \frac{4}{5} \cdot 4 \frac{EI}{l^3} = \left(\frac{1}{9} + \frac{16}{5} \right) \frac{EI}{l^3} \Rightarrow r_{22} = \frac{149}{45} \frac{EI}{l^3}$$

Stan zerowy

Układ geometrycznie wyznaczalny obciążamy obciążeniem zewnętrznym.



Rys. 9

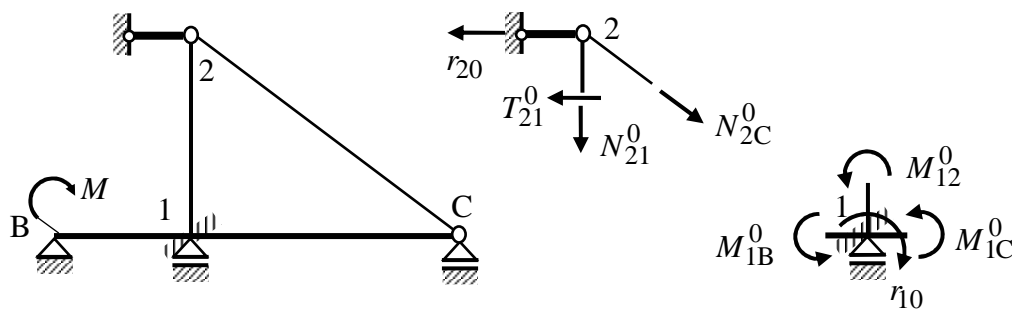
Obciążenie działa tylko na pręt 1B. Korzystamy ze wzorów na moment i siły tnące wyjściowe.

$$M_{1B}^0 = \frac{1}{2}M, \quad T_{1B}^0 = T_{B1}^0 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{M}{l_{1B}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{M}{2l} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{M}{l}$$

$$M_{12}^0 = 0, \quad T_{12}^0 = T_{21}^0 = 0$$

$$M_{1C}^0 = 0, \quad T_{1C}^0 = T_{C1}^0 = 0$$

$$N_{2C}^0 = N_{C2}^0 = 0$$



Rys. 10

Obliczamy reakcje fikcyjnych więzów.

$$\sum_i M_{i1}^0 = 0: \quad M_{1B}^0 + M_{1C}^0 + M_{12}^0 - r_{10} = 0 \Rightarrow r_{10} = M_{1B}^0 + M_{1C}^0 + M_{12}^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{10} = \left(\frac{1}{2} + 0 + 0\right)M = \frac{1}{2} \cdot M$$

$$\sum_i P_{ix2}^0 = 0: \quad -T_{21}^0 + \frac{4}{5}N_{2C}^0 - r_{20} = 0 \Rightarrow r_{20} = -T_{21}^0 + \frac{4}{5}N_{2C}^0 \Rightarrow$$

$$r_{20} = -0 + \frac{4}{5} \cdot 0 = 0 \Rightarrow r_{20} = 0$$

Korzystając z zasady superpozycji otrzymamy układ równań metody przemieszczeń

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_{10} \\ r_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości reakcji fikcyjnych podpór dostajemy

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{2} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{1}{3} \cdot \frac{EI}{l^2} \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{EI}{l^2} & \frac{149}{45} \cdot \frac{EI}{l^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}M \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań ma postać

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -r_{10} \\ -r_{20} \end{Bmatrix}$$

Wyznaczamy macierz odwrotną macierzy sztywności

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{2} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{1}{3} \cdot \frac{EI}{l^2} \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{EI}{l^2} & \frac{149}{45} \cdot \frac{EI}{l^3} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{298}{1629} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{10}{543} \cdot \frac{l^2}{EI} \\ -\frac{10}{543} \cdot \frac{l^2}{EI} & \frac{55}{181} \cdot \frac{l^3}{EI} \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy następujące rozwiązanie

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{298}{1629} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{10}{543} \cdot \frac{l^2}{EI} \\ -\frac{10}{543} \cdot \frac{l^2}{EI} & \frac{55}{181} \cdot \frac{l^3}{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}M \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{149}{1629} \cdot \frac{Ml}{EI} \\ \frac{5}{543} \cdot \frac{Ml^2}{EI} \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} -0,0915 \cdot \frac{Ml}{EI} \\ 0,0092 \cdot \frac{Ml^2}{EI} \end{Bmatrix}$$

Wykresy momentów gnących i sił tnących dla rozpatrywanego zadania zostaną wykonane po uprzednim wyznaczeniu wartości sił przekrojowych, bez konieczności sporządzania wykresów w kolejnych stanach. Wykorzystamy w tym celu wzory transformacyjne i wzory na momenty i siły tnące wyjściowe.

$$\begin{aligned} M_{1B} &= \frac{3 \cdot 2EI}{2l} (\varphi_1 - \psi_{B1}) + M_{1B}^0 = \frac{3EI}{l} \left(-\frac{149}{1629} \cdot \frac{Ml}{EI} - 0 \right) + \frac{1}{2}M = \left(3 \cdot \left(-\frac{149}{1629} \right) + \frac{1}{2} \right) \cdot M = \\ &= \frac{245}{1086}M \cong 0,2256M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{1B} &= -\frac{3 \cdot 2EI}{(2l)^2} (\varphi_1 - \psi_{1B}) + T_{1B}^0 = -\frac{3EI}{2l^2} \left(-\frac{149}{1629} \cdot \frac{Ml}{EI} - 0 \right) + \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{M}{l} \right) = \left(\frac{1331}{2172} - \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{M}{l} = \\ &= -\frac{1331}{2172} \cdot \frac{M}{l} \cong -0,6128 \cdot \frac{M}{l} \end{aligned}$$

$$T_{B1} = T_{1B} \cong -0,6128 \cdot \frac{M}{l}$$

$$\begin{aligned} M_{1C} &= \frac{3 \cdot 2EI}{4l} (\varphi_1 - \psi_{1C}) + M_{1C}^0 = \frac{3EI}{2l} \left(-\frac{149}{1629} \cdot \frac{Ml}{EI} - 0 \right) + 0 = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{149}{1629} \right) \cdot M = \\ &= -\frac{149}{1086}M \cong -0,1372M \end{aligned}$$

$$T_{1C} = -\frac{3 \cdot 2EI}{(4l)^2} (\varphi_1 - \psi_{1C}) + T_{1C}^0 = -\frac{3EI}{8l^2} \left(-\frac{149}{1629} \cdot \frac{Ml}{EI} - 0 \right) + 0 = \frac{149}{4344} \cdot \frac{M}{l} \cong 0,0343 \cdot \frac{M}{l}$$

$$T_{C1} = T_{1C} = \frac{149}{4344} \cdot \frac{M}{l} \cong 0,0343 \cdot \frac{M}{l}$$

$$M_{12} = \frac{3 \cdot EI}{3l} (\varphi_1 - \psi_{12}) + M_{12}^0 = \frac{EI}{l} \left(\varphi_1 - \left(-\frac{\Delta_2}{3l} \right) \right) + 0 = \frac{EI}{l} \left(\left(-\frac{149}{1629} \right) \cdot \frac{Ml}{EI} + \frac{5}{543} \cdot \frac{Ml^2}{EI} \right) =$$

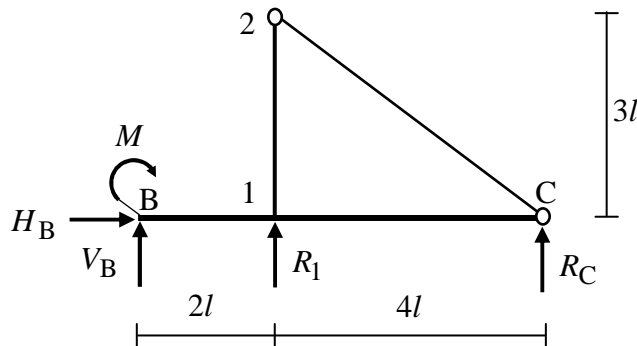
$$= -\frac{16}{181} M \cong -0,0884 M$$

$$T_{12} = -\frac{3 \cdot EI}{(3l)^2} (\varphi_1 - \psi_{12}) + T_{12}^0 = -\frac{EI}{3l^2} \left(\varphi_1 - \left(-\frac{\Delta_2}{3l} \right) \right) + 0 =$$

$$= -\frac{EI}{3l^2} \left(\left(-\frac{149}{1629} \right) \cdot \frac{Ml}{EI} + \frac{5}{543} \cdot \frac{Ml^2}{EI} \right) = \frac{16}{543} \cdot \frac{M}{l} \cong 0,0295 \cdot \frac{M}{l}$$

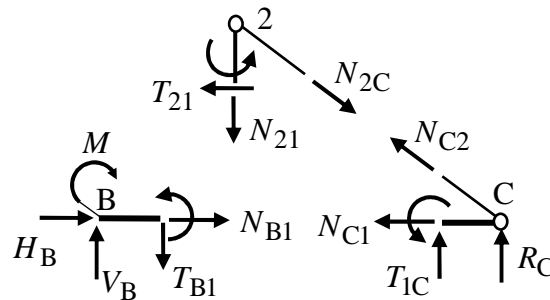
$$T_{21} = T_{12} = \frac{16}{543} \cdot \frac{M}{l} \cong 0,0295 \cdot \frac{M}{l}$$

W celu wyznaczenia sił normalnych zapiszemy równania równowagi.



Rys. 11

$$\sum_i P_{ix} = 0: H_B = 0$$



Rys. 12

$$\sum_i P_{ix}^B = 0: H_B + N_{B1} = 0 \Rightarrow N_{B1} = -H_B \Rightarrow N_{B1} = 0$$

$$\sum_i P_{ix}^2 = 0: -T_{21} + \frac{4}{5}N_{2C} = 0 \Rightarrow N_{2C} = \frac{5}{4}T_{21} = \frac{5}{4} \cdot \frac{16}{543} \cdot \frac{M}{l} = \frac{20}{543} \cdot \frac{M}{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{2C} = \frac{20}{543} \cdot \frac{M}{l} \cong 0,0368 \cdot \frac{M}{l}$$

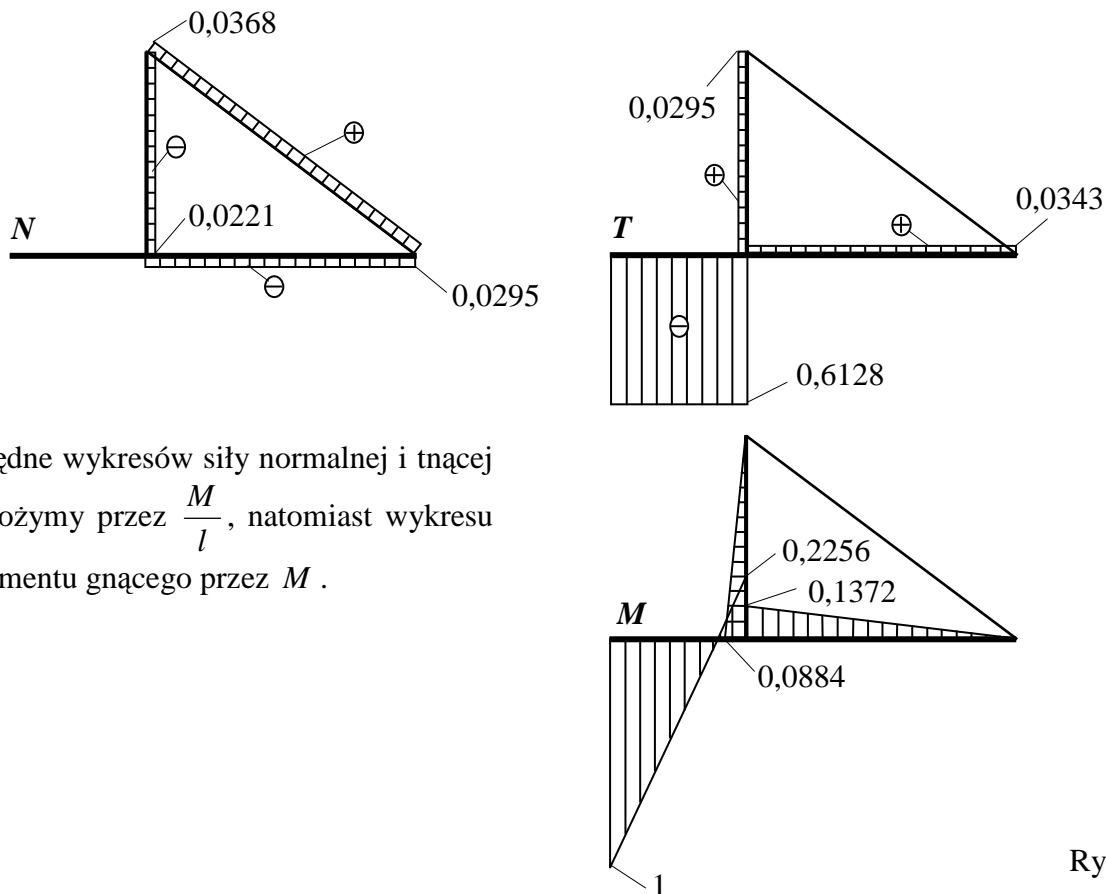
$$\sum_i P_{iy}^2 = 0: -N_{21} - \frac{3}{5}N_{2C} = 0 \Rightarrow N_{21} = -\frac{3}{5}N_{2C} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{20}{543} \cdot \frac{M}{l} = -\frac{12}{543} \cdot \frac{M}{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{21} = -\frac{12}{543} \cdot \frac{M}{l} \cong -0,0221 \cdot \frac{M}{l}$$

$$\sum_i P_{ix}^C = 0: -N_{C1} - \frac{4}{5}N_{2C} = 0 \Rightarrow N_{C1} = -\frac{4}{5}N_{2C} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{20}{543} \cdot \frac{M}{l} =$$

$$= -\frac{16}{543} \cdot \frac{M}{l} \Rightarrow N_{C1} = -\frac{16}{543} \cdot \frac{M}{l} \cong -0,0295 \cdot \frac{M}{l}$$

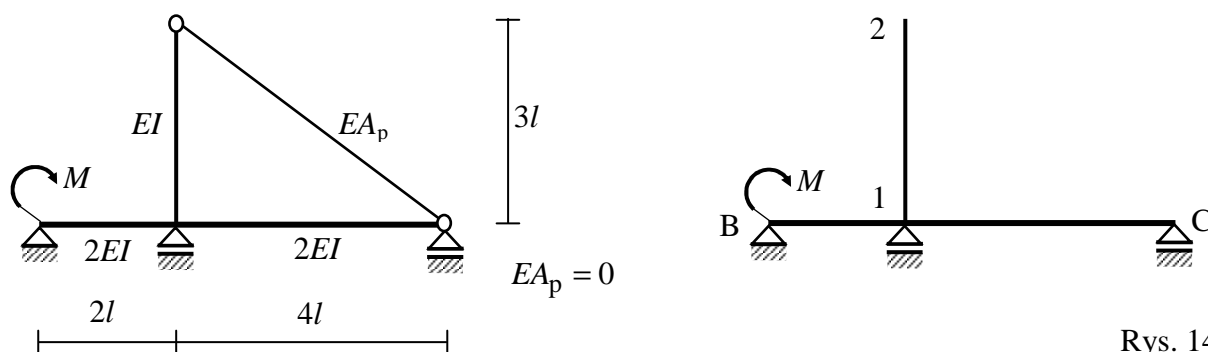
Wykresy sił przekrojowych



Rys. 13

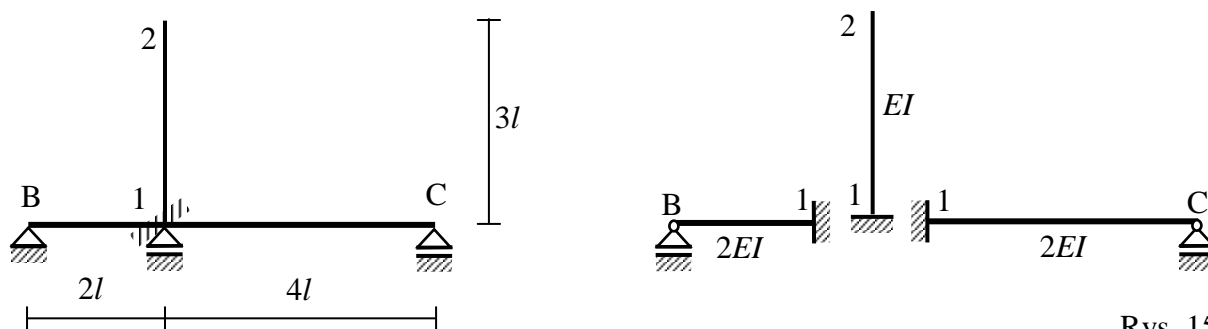
Korzystając z wyników otrzymanych w powyższym zadaniu możemy przeprowadzić analizę granicznych przypadków dla $EA_p \rightarrow 0$ lub $EA_p \rightarrow \infty$. Rozważania zawężymy do wyznaczenia wartości niewiadomych geometrycznych.

Przyjmijmy układ, w którym sztywność ściskania $EA_p \rightarrow 0$.



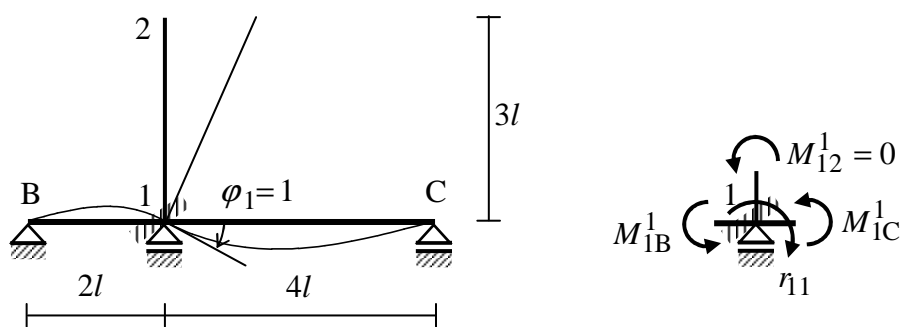
Rys. 14

Wprowadzamy oznaczenia węzła sztywnego, podpór i połączenia przegubowego. Po uwzględnieniu zmiany sztywności ściskania pręta 2C możemy rozważać schemat znajdujący się po prawej stronie na rysunku 14. Pręt 12 jest statycznie wyznaczalny i nie jest obciążony. W przekroju przywęzłowym 12 moment gnący ma wartość zero.



Rys. 15

Tworząc układ geometrycznie wyznaczalny wprowadzamy więz uniemożliwiający wystąpienie w układzie obrotu węzła 1. Przesuw przegubu 2 nie jest niezależną niewiadomą. Zależy on od kąta obrotu węzła 1. Pręt 12 nie odkształca się, natomiast podlega obrotowi jak tarcza sztywna wokół punktu 1.



Rys. 16

Obliczając wartość reakcji więzu r_{11} i r_{10} wykorzystamy wcześniej wyznaczone momenty w przekrojach przywęzłowych 1B i 1C w stanie $\varphi_1 = 1$ oraz stanie zerowym.

$$\sum_i M_{i1}^1 = 0: M_{1B}^1 + M_{1C}^1 + M_{12}^1 - r_{11} = 0 \Rightarrow r_{11} = M_{1B}^1 + M_{1C}^1 + M_{12}^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{11} = \frac{EI}{l} \left(3 + \frac{3}{2} + 0 \right) = \frac{9}{2} \cdot \frac{EI}{l}$$

$$\sum_i M_{i1}^0 = 0: M_{1B}^0 + M_{1C}^0 + M_{12}^0 - r_{10} = 0 \Rightarrow r_{10} = M_{1B}^0 + M_{1C}^0 + M_{12}^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{10} = \left(\frac{1}{2} + 0 + 0\right)M = \frac{1}{2} \cdot M$$

Otrzymamy równanie metody przemieszczeń

$$r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{10} = 0 \Rightarrow \frac{9}{2} \cdot \frac{EI}{l} \cdot \varphi_1 + \frac{1}{2} \cdot M = 0$$

Rozwiązanie ma postać

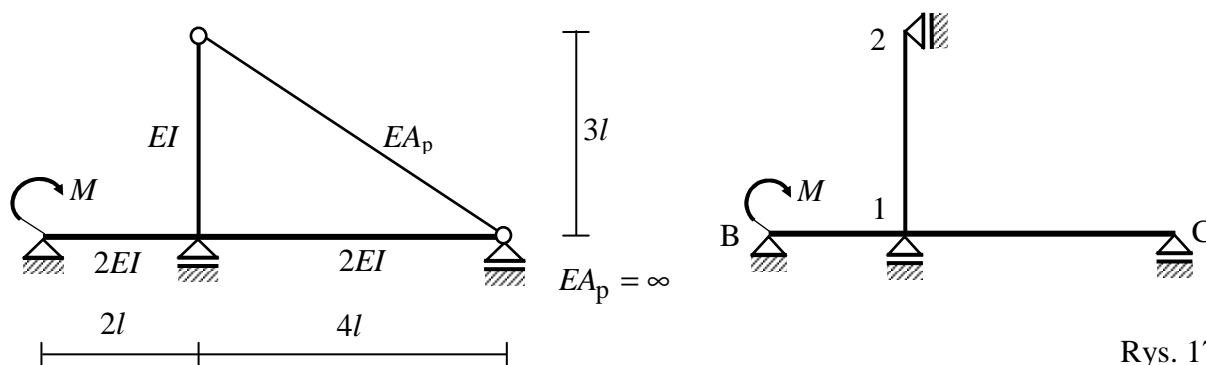
$$\varphi_1 = -\frac{1}{9} \cdot \frac{Ml}{EI} \cong -0,1111 \cdot \frac{Ml}{EI}$$

Przemieszczenie poziome punktu 2 wynosi

$$\Delta_2 = \varphi_1 \cdot 3l = -\frac{1}{9} \cdot \frac{Ml}{EI} \cdot 3l \cong -0,3333 \cdot \frac{Ml^2}{EI}$$

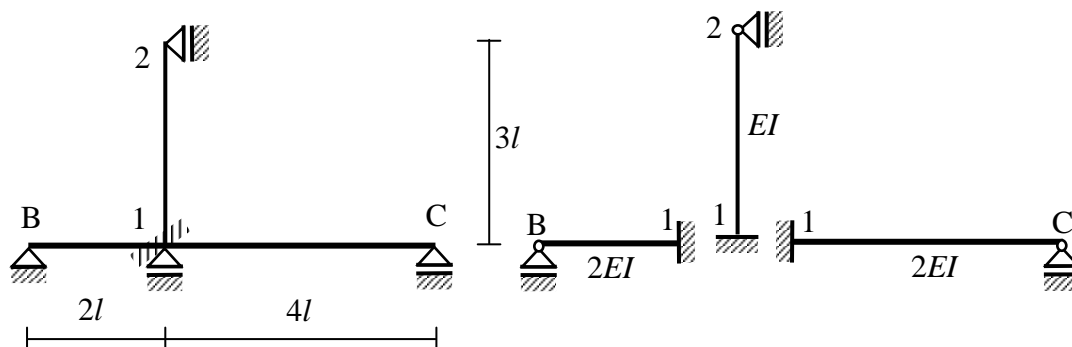
Znak ujemny oznacza, że przegub 2 doznaje przemieszczenia o zwrocie w lewo.

Przyjmijmy, że sztywność ściskania pręta 2C dąży do nieskończoności ($EA_p \rightarrow \infty$). Oznacza to brak przemieszczenia przegubu 2 w związku z zerowym wydłużeniem pręta 2C. Zachowujemy dotychczasowe oznaczenia węzła sztywnego, podpór i połączenia przegubowego. Po uwzględnieniu zmiany sztywności ściskania pręta 2C możemy rozważyć schemat znajdujący się po prawej stronie na rysunku 17.



Rys. 17

Układ jest jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalny. Wprowadzamy więc blokujący obrót węzła 1, tworząc w ten sposób układ geometrycznie wyznaczalny.



Rys. 18

Niewiadomą geometryczną jest kąt obrotu węzła 1. Reakcje fikcyjnego więzu r_{11} i r_{10} są identyczne z otrzymanymi dla układu dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalnego. Korzystając z tych wartości otrzymamy równanie metody przemieszczeń

$$r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{11}{2} \cdot \frac{EI}{l} \cdot \varphi_1 + \frac{1}{2} \cdot M = 0$$

Rozwiązanie ma postać

$$\varphi_1 = -\frac{1}{11} \cdot \frac{Ml}{EI} \cong -0,0909 \cdot \frac{Ml}{EI}$$

W tabeli zestawione zostały wartości niewiadomych geometrycznych dla rozpatrzonych przypadków.

$EA_p \rightarrow \infty$	$EA_p = 25 \frac{EI}{l^2}$	$EA_p \rightarrow 0$
$ \varphi_1 = 0,0909 \frac{Ml}{EI}$	$ \varphi_1 = 0,0915 \frac{Ml}{EI}$	$ \varphi_1 = 0,1111 \frac{Ml}{EI}$
$\Delta_2 = 0$	$ \Delta_2 = 0,0092 \frac{Ml^2}{EI}$	$ \Delta_2 = 0,3333 \frac{Ml^2}{EI}$

Z wartości tych wynika, że zmniejszenie sztywności pręta dwuprzegubowego powoduje wzrost wartości bezwzględnej kąta obrotu węzła 1 i przemieszczenia przegubu 2, a zwiększenie sztywności tego pręta ma odwrotny wpływ na wielkości omawianych przemieszczeń. Czytelnika zachęca się do wykonania wykresu momentu gnącego w granicznych przypadkach w celu uzupełnienia analizy.