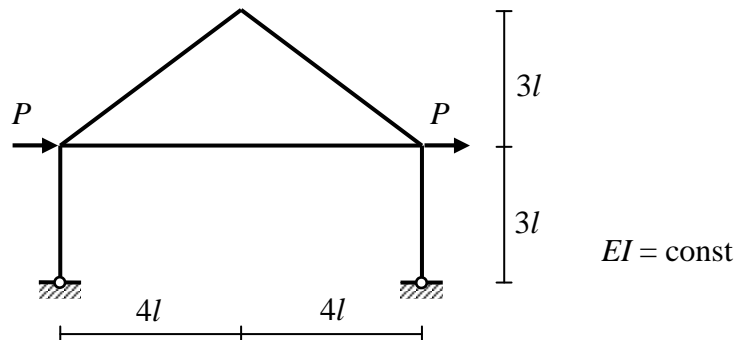


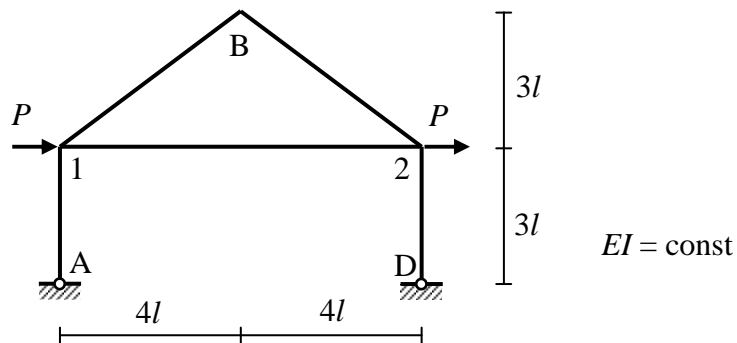
Przykład 9.2. Rama symetryczna z obciążeniem antysymetrycznym

Polecenie: Sporządzić wykresy sił przekrojowych dla poniższej ramy korzystając z metody przemieszczeń



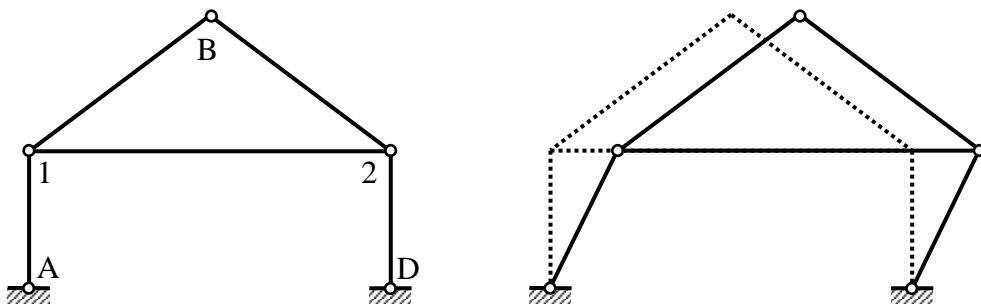
Rys. 1

Wprowadzamy oznaczenia podpór i węzłów sztywnych.



Rys. 2

W celu wyznaczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności musimy określić liczbę stopni swobody łańcucha kinematycznego, utworzonego z rozpatrywanej ramy. Wprowadzamy połączenia przegubowe w miejsce węzłów sztywnych.



Rys. 3

Liczbę stopni swobody łańcucha kinematycznego możemy wyznaczyć ze wzoru

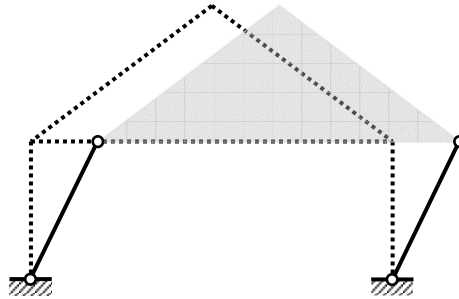
$$l_s = 3 \cdot t - w_w - w_z$$

gdzie:

- t - liczba tarcz (prętów),
- w_w - liczba więzów wewnętrznych,
- w_z - liczba więzów zewnętrznych.

$$l_s = 3 \cdot 5 - (2 \cdot 4 + 1 \cdot 2) - (2 \cdot 2) = 15 - 10 - 4 = 1$$

Zauważmy, że osie prętów 1B, 12 i 2B tworzą trójkąt. Możemy układ tych trzech prętów traktować jak tarczę sztywną.



Rys. 4

$$l_s = 3 \cdot 3 - (2 \cdot 2) - (2 \cdot 2) = 9 - 4 - 4 = 1$$

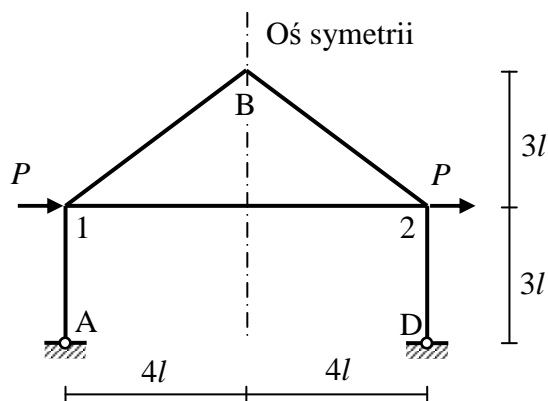
Liczba więzów wewnętrznych jest równa liczbie oddziaływań w połączeniach podukładów, natomiast liczba więzów zewnętrznych jest równa liczbie reakcji podporowych.

Liczba stopni swobody łańcucha kinematycznego odpowiada liczbie niezależnych przesuwów rozpatrywanej ramy.

Stopień geometrycznej niewyznaczalności układu n_g obliczamy jako sumę liczby węzłów, które mogą doznać obrotu oraz liczby niezależnych przesuwów.

$$n_g = 3 + 1 = 4$$

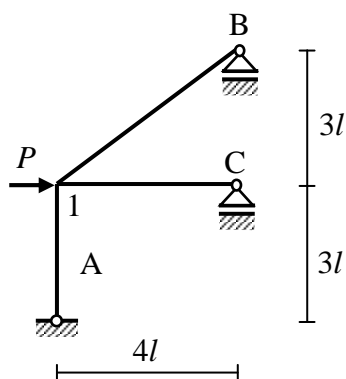
Budowa ramy jest symetryczna. Oś symetrii przechodzi przez węzeł B i ma kierunek pionowy. Wykorzystanie symetrii ramy pozwoli nam na uproszczenie rozwiązania zadania. Obciążenie dwiema siłami skupionymi o jednakowym zwrocie i o kierunku prostopadłym do osi symetrii jest antysymetryczne względem tej osi.



Rys. 5

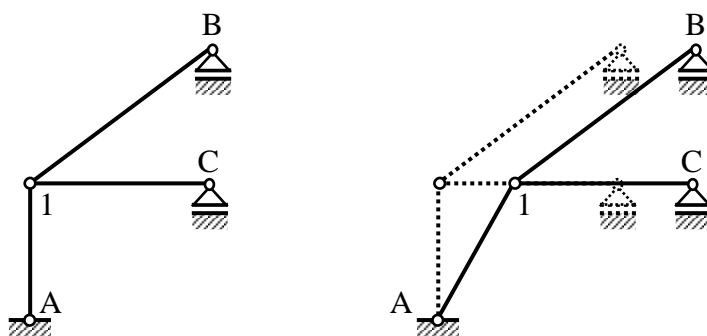
W przypadku obciążenia antysymetrycznego węzeł na osi symetrii może się obracać oraz przemieszczać w kierunku prostopadłym do osi symetrii, natomiast jego przemieszczenie o kierunku równoległym do osi symetrii jest równe zero. Należy wprowadzić odpowiednie podparcie w punkcie B oraz w połowie pręta 12. Warunki te będą spełniały podpory przegubowe przesuwne o poziomym kierunku możliwego przesuwu.

Antysymetria - schemat połówkowy



Rys. 6

Tworzymy łańcuch kinematyczny dla schematu półkowego. W węźle 1 wprowadzamy przegub.



Rys. 7

Liczbę stopni swobody łańcucha kinematycznego możemy wyznaczyć ze wzoru

$$l_s = 3 \cdot t - w_w - w_z$$

gdzie:

- t - liczba tarcz (prętów),
- w_w - liczba więzów wewnętrznych,
- w_z - liczba więzów zewnętrznych.

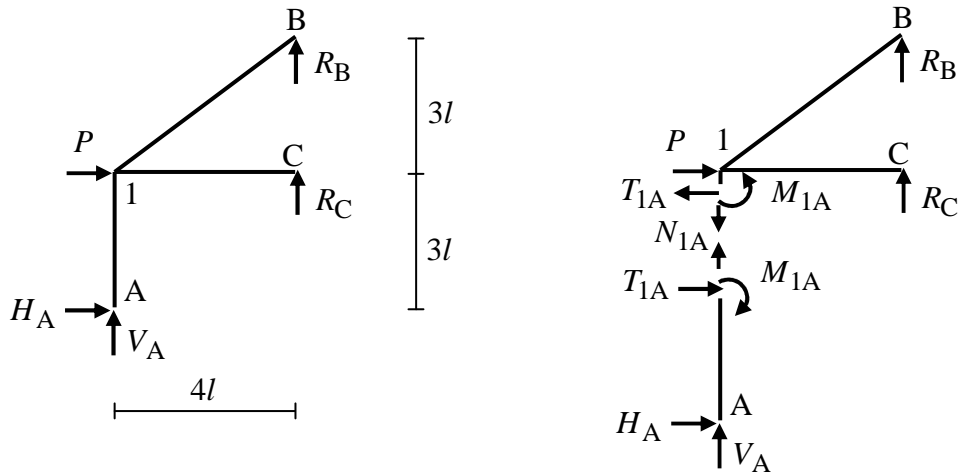
$$l_s = 3 \cdot 3 - (1 \cdot 4) - (1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 9 - 4 - 4 = 1$$

Na rysunku 7 przedstawiony jest plan przemieszczeń łańcucha kinematycznego dla schematu półkowego. Węzeł 1 może doznać przemieszczenia o kierunku poziomym.

Stopień geometrycznej niewyznaczalności układu n_g obliczamy jako sumę węzłów, które mogą doznać obrotu oraz sumę niezależnych przesuwów.

$$n_g = 1 + 1 = 2$$

Pomimo, że rozwiązywana rama jest również statycznie niewyznaczalna ($n_s = 1$), możemy wyznaczyć składowe poziomą i pionową reakcji podpory A, korzystając z równań równowagi: suma rzutów sił na oś poziomą oraz suma momentów względem punktu C. Znając wartość składowej pionowej i poziomej tej reakcji jesteśmy w stanie wyznaczyć w przekroju przywęzłowym 1A wartość siły normalnej i tnącej oraz momentu gnącego.



Rys. 8

$$\sum_i P_{ix} = 0 \Rightarrow H_A + P = 0 \Rightarrow H_A = -P$$

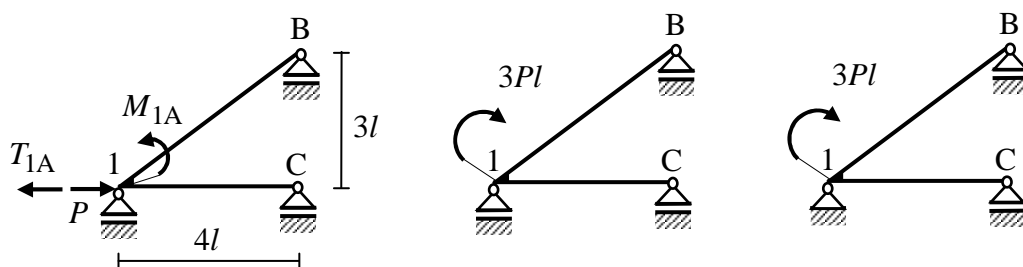
$$\sum_i M_{iC} = 0 \Rightarrow H_A \cdot 3l - V_A \cdot 4l = 0 \Rightarrow V_A = \frac{3}{4} H_A = -\frac{3}{4} P$$

Moment w przekroju przywęzłowym 1A wyznaczamy z równania sumy momentów względem 1 dla pręta 1A.

$$\sum_i M_{i1}^{1A} = 0 \Rightarrow H_A \cdot 3l - M_{1A} = 0 \Rightarrow M_{1A} = H_A \cdot 3l = -P \cdot 3l \Rightarrow M_{1A} = -3Pl$$

$$\sum_i P_{ix}^{1A} = 0 \Rightarrow H_A + T_{1A} = 0 \Rightarrow T_{1A} = -H_A = -(-P) \Rightarrow T_{1A} = P$$

Zmiana długości prętów wywołana działaniem sił normalnych jest pomijalnie mała. Oznacza to, że składowa pionowa przemieszczenia węzła 1 ma wartość zerową. Uwzględniając wyznaczone wartości M_{1A} oraz T_{1A} możemy górną część schematu półkowego przedstawić zgodnie z rysunkiem 9.

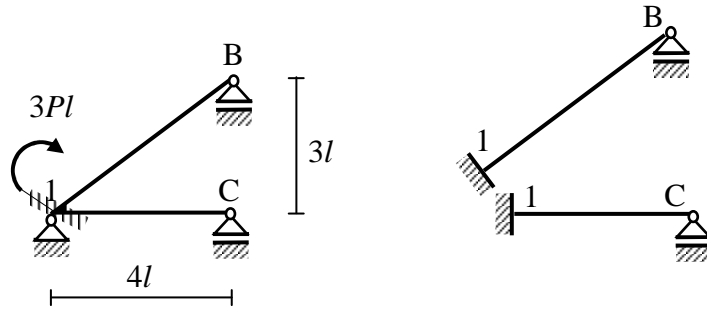


Rys. 9

Należy zauważyć, że schemat znajdujący się na rysunku 9 jest mechanizmem. Układ ten może przemieszczać się w kierunku poziomym, mimo to możemy wykonać wykresy w tym układzie, gdyż równanie rzutów sił na oś poziomą jest spełnione tożsamościowo. Którąkolwiek z trzech podpór przegubowo-przesuwnych zastąpimy podporą nieprzesuwną. Nie oznacza to, że przemieszczenie poziome punktu 1, B lub C ma wartość zerową. Nie ma ono jednak wpływu na wykresy sił przekrojowych w prętach 1B i 1C. Z rysunku 7 wynika, że

wymienione pręty będą miały zerowe obroty cięwiw. Z kolei pręty 1A oraz 2C są statycznie wyznaczalnymi częściami układu.

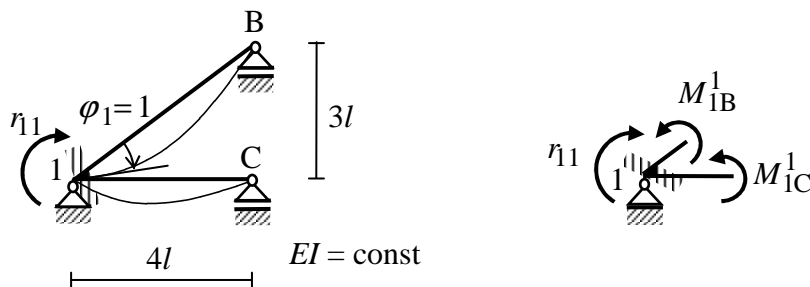
Utworzymy układ geometrycznie wyznaczalny, w którym kąt obrotu węzła 1 jest zerowy dzięki wprowadzeniu fikcyjnego więzu blokującego możliwość obrotu tego węzła. Na podstawie układu geometrycznie wyznaczalnego ustalamy schematy dla poszczególnych prętów ramy.



Rys. 10

Stan $\varphi_1 = 1$

Obracamy węzeł 1 o kąt $\varphi_1 = 1$ zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, a następnie blokujemy fikcyjnym więzem, w którym powstaje reakcja r_{11} .



Rys. 11

W przekrojach przywęzłowych 1B i 1C powstają momenty i siły tnące, których wartości wyznaczamy ze wzorów transformacyjnych. Z równania równowagi dla węzła 1 wyznaczamy reakcję r_{11} , a potem sporządzamy wykresy M_1 , T_1 i N_1 .

$$M_{1B}^1 = \frac{3EI}{5l}(1) = \frac{3EI}{5l}$$

$$T_{1B}^1 = T_{B1}^1 = -\frac{3EI}{(5l)^2}(1) = -\frac{3EI}{25l^2}$$

$$M_{1C}^1 = \frac{3EI}{4l}(1) = \frac{3EI}{4l}$$

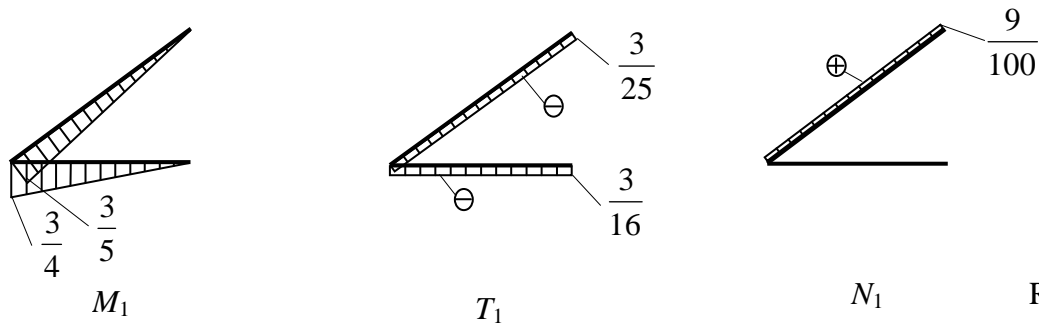
$$T_{1C}^1 = T_{C1}^1 = -\frac{3EI}{(4l)^2}(1) = -\frac{3EI}{16l^2}$$

Na rysunku 11 po prawej stronie w przekrojach przywęzłowych zaznaczone są tylko momenty, ponieważ tylko one występują w poniższym równaniu równowagi. Reakcję r_{11} w miejscu fikcyjnego więzu wyznaczamy z równania sumy momentów dla węzła 1.

$$\sum_i M_{1i}^1 = 0: \quad M_{1B}^1 + M_{1C}^1 - r_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{11} = M_{1B}^1 + M_{1C}^1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r_{11} = \frac{EI}{l} \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{4} \right) = \frac{27}{20} \cdot \frac{EI}{l}$$

Sporządzamy wykresy w stanie $\varphi_1 = 1$.



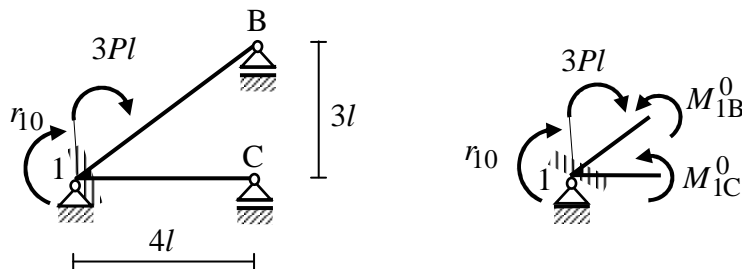
Rys. 12

Rzędne wykresu momentu gnącego mnożymy przez $\frac{EI}{l}$, natomiast wykresów siły tnącej i normalnej przez $\frac{EI}{l^2}$.

Wartości momentów gnących i sił tnących wyznaczone zostały ze wzorów transformacyjnych. Wartość siły normalnej w przęcie 1B wyznaczona jest z równania równowagi dla węzła podporowego B.

Stan zerowy

Układ geometrycznie wyznaczalny obciążamy obciążeniem zewnętrznym.



Rys. 13

Węzeł 1 blokujemy fikcyjnym więzem, w którym powstaje reakcja r_{10} . Na pręty 1B i 1C nie działa obciążenie zewnętrzne. Moment skupiony $3Pl$ przyłożony jest do unieruchomionego węzła 1.

$$M_{1B}^0 = 0, \quad T_{1B}^0 = T_{B1}^0 = 0$$

$$M_{1C}^0 = 0, \quad T_{1C}^0 = T_{C1}^0 = 0$$

Na rysunku 13 po prawej stronie w przekrojach przywęzłowych zaznaczone są tylko momenty, ponieważ tylko one występują w poniższym równaniu równowagi. Reakcję r_{10} w miejscu fikcyjnego więzu wyznaczamy z równania sumy momentów dla węzła 1.

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1B}^0 + M_{1C}^0 - 3Pl - r_{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{10} = -3Pl$$

Wykresy M_0, T_0 oraz N_0 mają zerowe rzędne.

Korzystając z zasady superpozycji otrzymamy następujące równanie metody przemieszczeń

$$r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{10} = 0$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości reakcji fikcyjnej podpory dostajemy

$$\frac{27 EI}{20 l} \cdot \varphi_1 + (-3Pl) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{20}{9} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$$

Wykresy sił przekrojowych w rzeczywistym układzie geometrycznie niewyznaczalnym sporządzamy korzystając z zasady superpozycji.

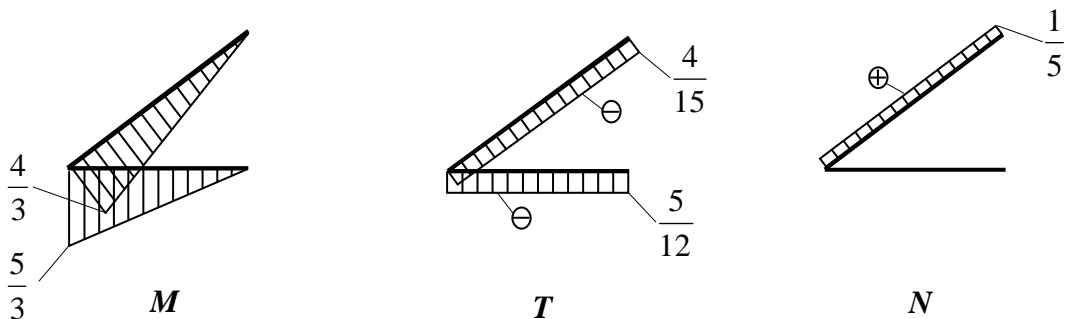
$$N = N_1 \cdot \varphi_1 + N_0 \quad T = T_1 \cdot \varphi_1 + T_0 \quad M = M_1 \cdot \varphi_1 + M_0$$

Uwzględniamy, że wykresy sił przekrojowych w stanie zerowym mają zerowe rzędne

$$N_0 = 0, \quad T_0 = 0, \quad M_0 = 0$$

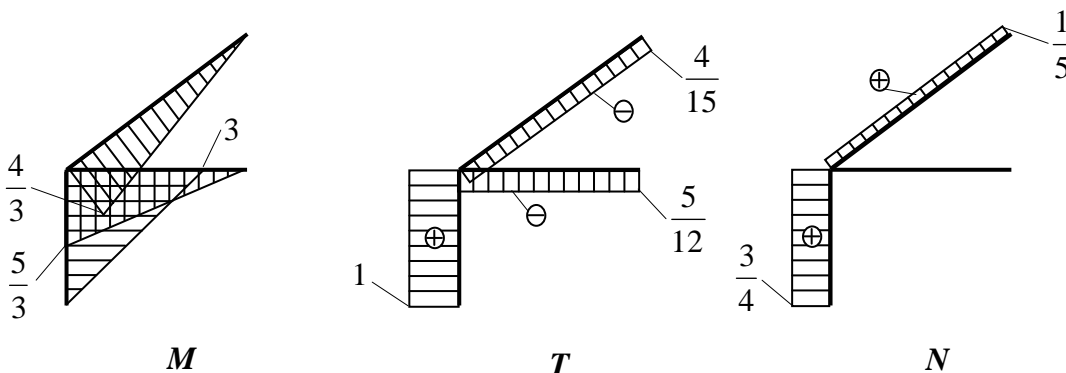
Otrzymujemy

$$N = N_1 \cdot \varphi_1 \quad T = T_1 \cdot \varphi_1 \quad M = M_1 \cdot \varphi_1$$



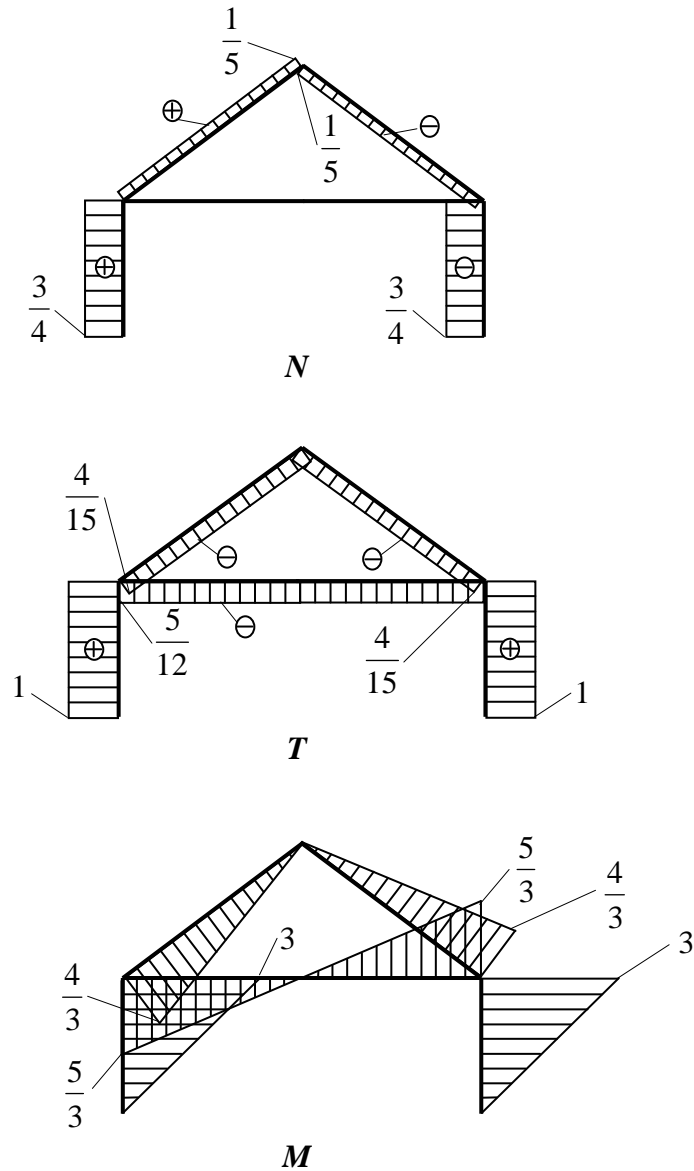
Rys. 14

Rzędne wykresów siły tnącej i normalnej mnożymy przez P , natomiast wykresu momentu gnącego przez Pl . Powyższe wykresy należy uzupełnić wykresami dla pręta 1A.



Rys. 15

Wykresy sił przekrojowych zostały wykonane dla lewego schematu połówkowego. Należy jeszcze sporządzić wykresy w prawej części układu. W układach symetrycznych obciążonych obciążeniem antysymetrycznym wykresy siły normalnej i momentu gnącego mają charakter antysymetryczny, natomiast wykres siły tnącej jest symetryczny.



Rys. 16

Rzędne wykresów siły tnącej i normalnej mnożymy przez P , natomiast wykresu momentu gnącego przez Pl .