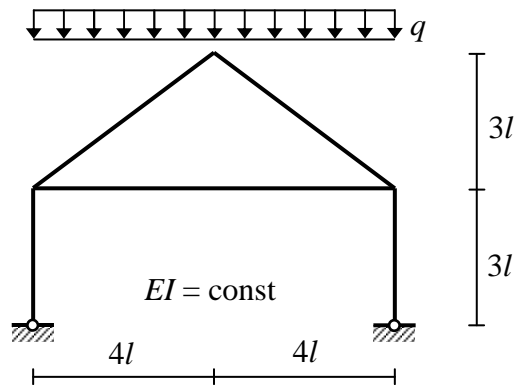


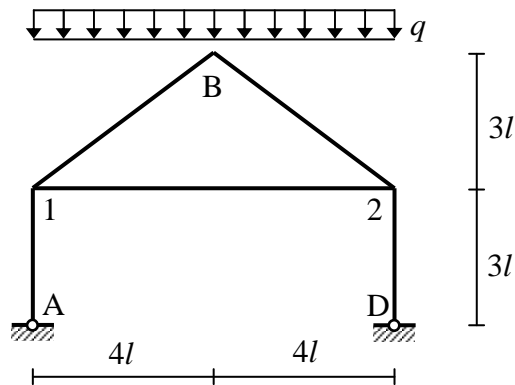
Przykład 9.1. Rama symetryczna z obciążeniem symetrycznym

Polecenie: Sporządzić wykresy sił przekrojowych dla poniższej ramy korzystając z metody przemieszczeń



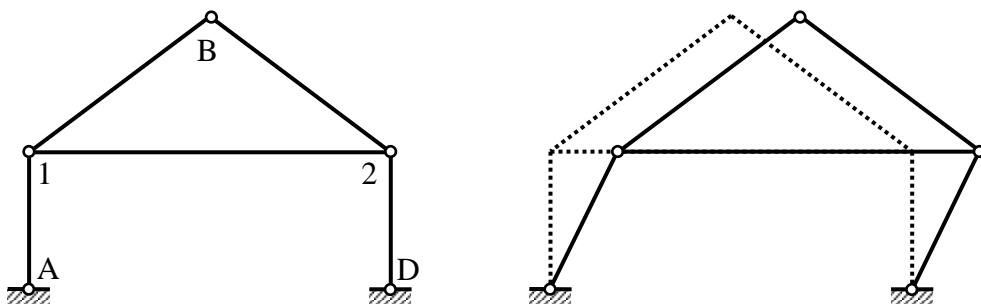
Rys. 1

Wprowadzamy oznaczenia podpór i węzłów sztywnych.



Rys. 2

W celu wyznaczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności musimy określić liczbę stopni swobody łańcucha kinematycznego, utworzonego z rozpatrywanej ramy. Wprowadzamy połączenia przegubowe w miejsce węzłów sztywnych.



Rys. 3

Liczbę stopni swobody łańcucha kinematycznego możemy wyznaczyć ze wzoru

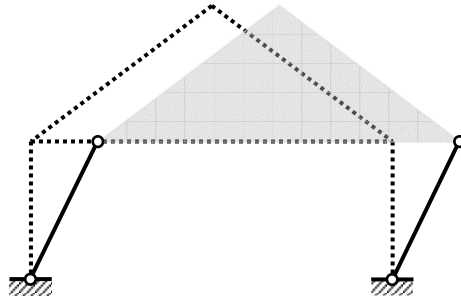
$$l_s = 3 \cdot t - w_w - w_z$$

gdzie:

- t - liczba tarcz (prętów),
- w_w - liczba więzów wewnętrznych,
- w_z - liczba więzów zewnętrznych.

$$l_s = 3 \cdot 5 - (2 \cdot 4 + 1 \cdot 2) - (2 \cdot 2) = 15 - 10 - 4 = 1$$

Zauważmy, że osie prętów 1B, 12 i B2 tworzą trójkąt. Możemy układ tych trzech prętów traktować jak tarczę sztywną.



Rys. 4

$$l_s = 3 \cdot 3 - (2 \cdot 2) - (2 \cdot 2) = 9 - 4 - 4 = 1$$

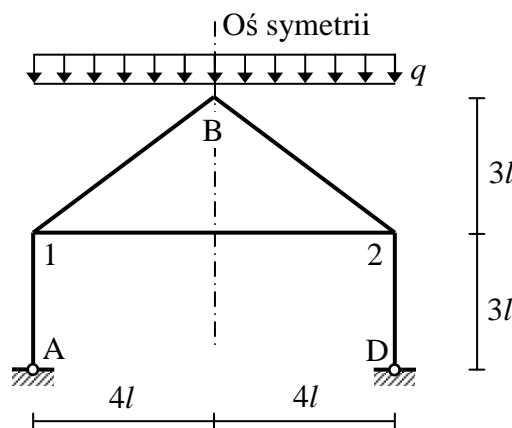
Liczba węzłów wewnętrznych jest równa liczbie oddziaływań w połączeniach podukładów, natomiast liczba węzłów zewnętrznych jest równa liczbie reakcji podporowych.

Liczba stopni swobody łańcucha kinematycznego odpowiada liczbie niezależnych przesuwów rozpatrywanej ramy.

Stopień geometrycznej niewyznaczalności układu n_g obliczamy jako sumę liczby węzłów, które mogą doznać obrotu oraz liczby niezależnych przesuwów.

$$n_g = 3 + 1 = 4$$

Budowa ramy jest symetryczna. Oś symetrii przechodzi przez węzeł B i ma kierunek pionowy. Wykorzystanie symetrii pozwoli nam na uproszczenie rozwiązania zadania. Obciążenie ciągłe q jest symetryczne względem tej osi.

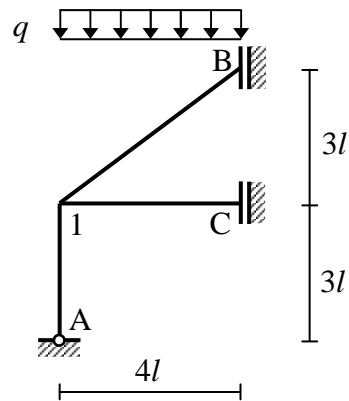


Rys. 5

W ramie obciążonej obciążeniem symetrycznym węzły na osi symetrii nie doznają obrotu i przemieszczenia prostopadłego do osi symetrii układu, natomiast mogą przemieścić się w kierunku równoległym do osi symetrii. W przypadku obciążenia antysymetrycznego węzły na osi symetrii obracają się i przemieszczają w kierunku prostopadłym do osi symetrii, a przemieszczenie o kierunku równoległym do osi symetrii jest równe zero.

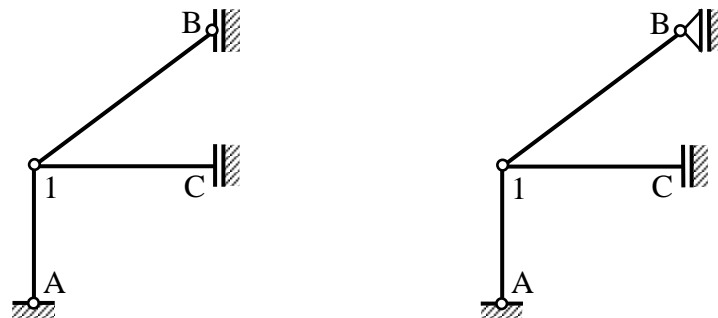
Omówione powyżej warunki możemy wykorzystać rozwiązując schematy „połówkowe” (zredukowane).

Symetria - schemat połówkowy



Rys. 6

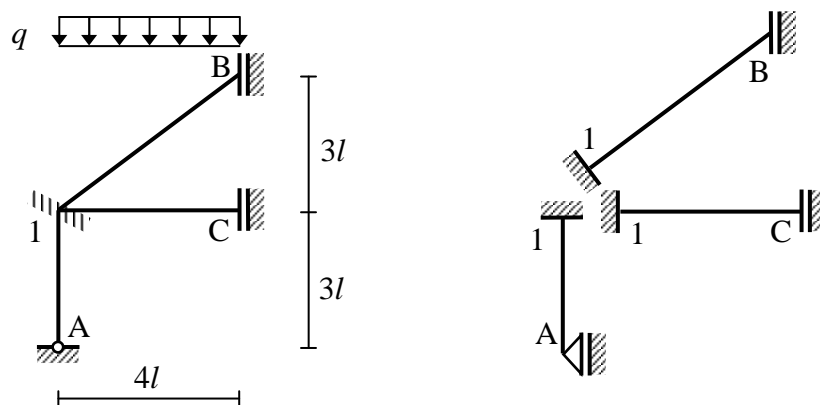
Tworzymy łańcuch kinematyczny dla schematu połówkowego. W węźle 1 oraz w teleskopie B wprowadzamy przeguby. W przypadku podpory teleskopowej C o okładkach prostopadłych do osi pręta 1C przegubu nie wprowadzamy, gdyż pionowe przemieszczenie punktu C zależy wyłącznie od kąta obrotu węzła 1 i ewentualnego obciążenia zewnętrznego pręta 1C. Po wprowadzeniu przegubu do teleskopu B, podpora ta może być traktowana jak podpora przesuwna.



Rys. 7

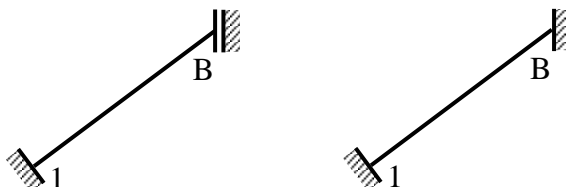
Składowe pionowa i pozioma przemieszczenia punktu 1 są zerowe, tym samym otrzymany łańcuch kinematyczny jest układem geometrycznie niezmiennym. Oznacza to, że rama z rysunku 5 jest nieprzesuwana. Jediną niewiadomą geometryczną jest kąt obrotu węzła 1.

Utworzymy układ geometrycznie wyznaczalny, w którym kąt obrotu węzła 1 jest zerowy dzięki wprowadzeniu fikcyjnego więzu blokującego możliwość obrotu tego węzła. Na podstawie układu geometrycznie wyznaczalnego ustalamy schematy prętów w poszczególnych przęsłach ramy.



Rys. 8

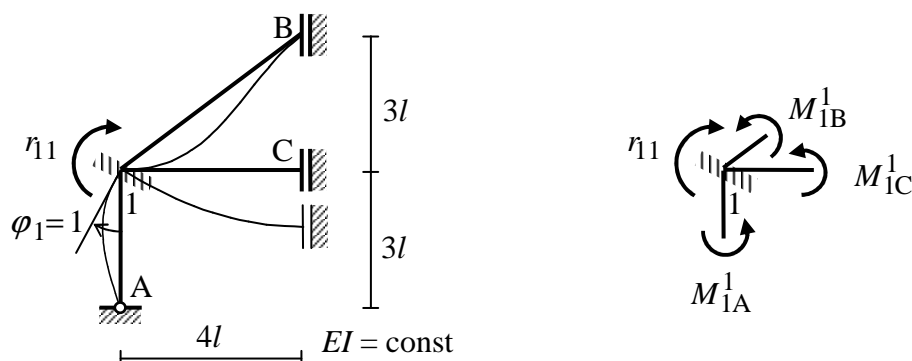
Wpływ sił normalnych działających w prętach zginanych na wielkość przemieszczeń jako mały też można pominąć. W węźle podporowym B nie występuje obrót oraz składowa pozioma przemieszczenia. Wobec braku zmiany długości pręta 1B również składowa pionowa przemieszczenia węzła B ma wartość zerową. Wynika stąd, że dla pręta 1B będziemy stosować wzory transformacyjne jak dla pręta obustronnie utwierdzonego.



Rys. 9

Stan $\varphi_1 = 1$

Obracamy węzeł 1 o kąt $\varphi_1 = 1$ zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, a następnie blokujemy fikcyjnym więzem, w którym powstaje reakcja r_{11} .



Rys. 10

W przekrojach przywęzłowych 1A, 1B i 1C powstają momenty i siły tnące, których wartości wyznaczamy ze wzorów transformacyjnych. Z równania równowagi dla węzła 1 wyznaczamy reakcję r_{11} , a potem sporządzamy wykresy M_1 , T_1 i N_1 .

$$M_{1A}^1 = \frac{3EI}{3l}(1-0) = \frac{EI}{l}$$

$$T_{1A}^1 = T_{A1}^1 = -\frac{3EI}{(3l)^2}(1-0) = -\frac{EI}{3l^2}$$

$$M_{1B}^1 = \frac{2EI}{5l}(2 \cdot 1) = \frac{4EI}{5l}, \quad M_{B1}^1 = \frac{2EI}{5l}(1 \cdot 1) = \frac{2EI}{5l}$$

$$T_{1B}^1 = T_{B1}^1 = -\frac{6EI}{(5l)^2}(1) = -\frac{6EI}{25l^2}$$

$$M_{1C}^1 = \frac{EI}{4l}(1) = \frac{EI}{4l}, \quad M_{C1}^1 = \frac{EI}{4l}(-1) = -\frac{EI}{4l}$$

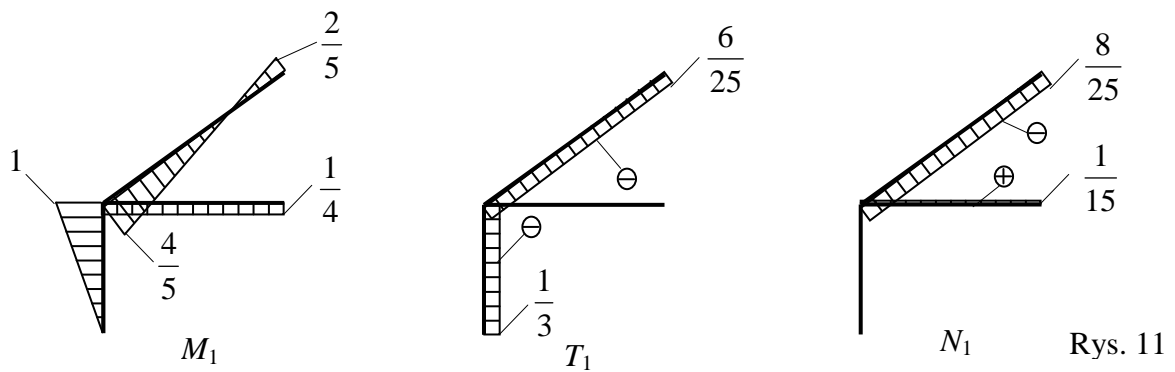
$$T_{1C}^1 = T_{C1}^1 = 0$$

Na rysunku 10 po prawej stronie w przekrojach przywęzłowych zaznaczone są tylko momenty, ponieważ tylko one występują w poniższym równaniu równowagi. Reakcję r_{11} w miejscu fikcyjnego więzu wyznaczamy z równania sumy momentów dla węzła 1.

$$\sum_i M_{1i}^1 = 0: \quad M_{1A}^1 + M_{1B}^1 + M_{1C}^1 - r_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{11} = M_{1A}^1 + M_{1B}^1 + M_{1C}^1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r_{11} = \frac{EI}{l} \left(1 + \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \right) = \frac{41}{20} \cdot \frac{EI}{l}$$

Reakcja r_{11} ma wartość dodatnią.

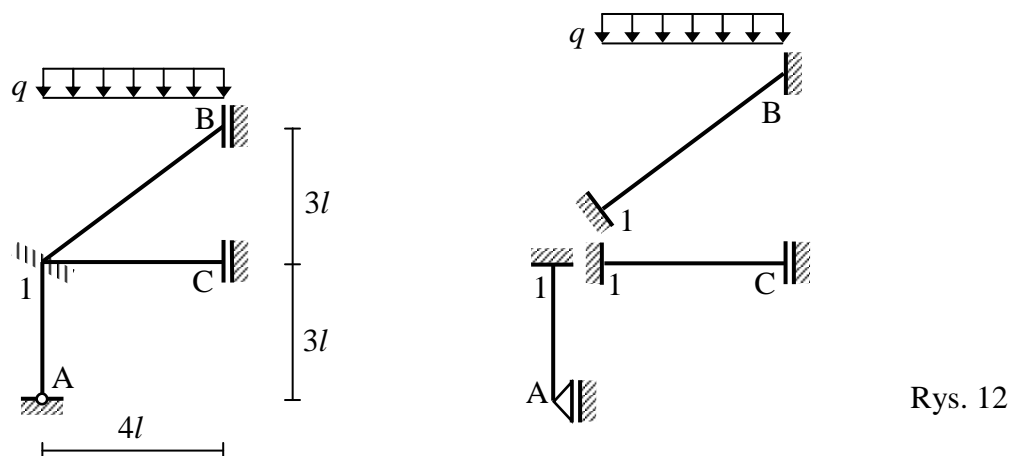


Rzędne wykresu momentu gnącego mnożymy przez $\frac{EI}{l}$, natomiast wykresów siły tnącej i normalnej przez $\frac{EI}{l^2}$.

Wartości momentów gnących i sił tnących wyznaczone zostały ze wzorów transformacyjnych. Wartości sił normalnych otrzymuje się z równań równowagi zapisanych dla całego układu oraz dla węzłów podporowych, wykorzystując wartości sił tnących.

Stan zerowy

Układ geometrycznie wyznaczalny obciążamy obciążeniem zewnętrznym.

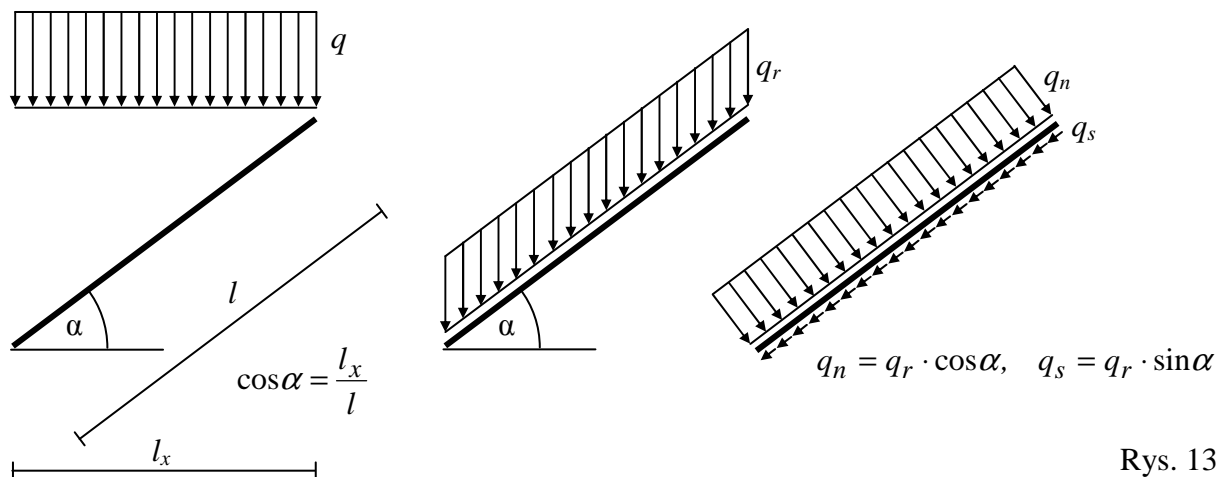


Obciążenie ciągłe q o kierunku pionowym nie jest prostopadłe do osi pręta 1B, tym samym nie możemy skorzystać wprost ze wzorów na momenty i siły tnące wyjściowe. Należy

przedstawić zadane obciążenie ciągłe jako sumę obciążenia normalnego i stycznego do osi pręta. Na wartość momentów i sił tnących wyjściowych wpływ ma obciążenie normalne. Obciążenie zadane jest na jednostkę rzutu długości pręta na kierunek poziomy. Obciążenie to ma kierunek pionowy. Możemy je zastąpić obciążeniem równoważnym q_r , które ma kierunek pionowy i wartość zadaną na jednostkę długości pręta. Z kolei obciążenie q_r zastępujemy obciążeniem normalnym q_n i stycznym q_s . Długość l_x jest rzutem długości pręta l na kierunek poziomy, to jest prostopadły do kierunku obciążenia q .

Obciążenia q i q_r będą równoważne w przypadku, gdy ich wypadkowe będą sobie równe.

$$q \cdot l_x = q_r \cdot l \Rightarrow q \cdot l \cdot \cos \alpha = q_r \cdot l \Rightarrow q_r = q \cdot \cos \alpha$$



Związek między q_r i q podstawiamy do zależności, z których wyznaczamy wartość obciążenia normalnego i stycznego.

$$q_n = q_r \cdot \cos \alpha = q \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha = q \cos^2 \alpha, \quad q_s = q_r \cdot \sin \alpha = q \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = q \sin \alpha \cos \alpha$$

Z wymiarów zadania wynika, że długość pręta 1B wynosi $\sqrt{(3l)^2 + (4l)^2} = 5l$. Stąd mamy

$$\cos \alpha = \frac{l_x}{l} = \frac{4l}{5l} = \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{l_y}{l} = \frac{3l}{5l} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_n = q \cos^2 \alpha = q \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} q, \quad \text{a } q_s = q_r \cdot \sin \alpha = q \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = q \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} q$$

Wyznaczamy wartości momentów i sił tnących wyjściowych.

$$M_{1B}^0 = -\frac{1}{12} q_n (5l)^2 = -\frac{1}{12} \cdot \frac{16}{25} q \cdot (5l)^2 = -\frac{4}{3} ql^2$$

$$M_{B1}^0 = \frac{1}{12} q_n (5l)^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{16}{25} q \cdot (5l)^2 = \frac{4}{3} ql^2$$

$$T_{1B}^0 = \frac{1}{2} q_n \cdot 5l = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{25} q \cdot 5l = \frac{8}{5} ql$$

$$T_{B1}^0 = -\frac{1}{2} q_n \cdot 5l = -\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{25} q \cdot 5l = -\frac{8}{5} ql$$

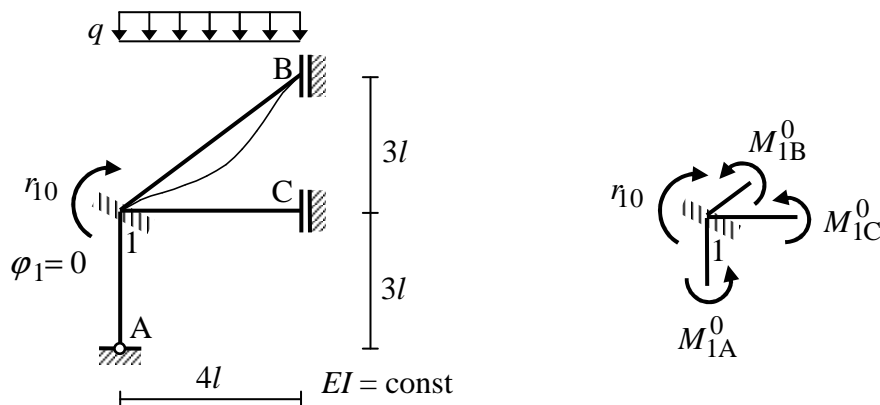
$$M_{1A}^0 = 0$$

$$T_{1A}^0 = T_{A1}^0 = 0$$

$$M_{1C}^0 = M_{C1}^0 = 0$$

$$T_{1C}^0 = T_{C1}^0 = 0$$

Na pręty 1A i 1C nie działa obciążenie zewnętrzne, stąd wartości sił tnących i momentów wyjściowych w przekrojach przywęzłowych tych prętów są zerowe.

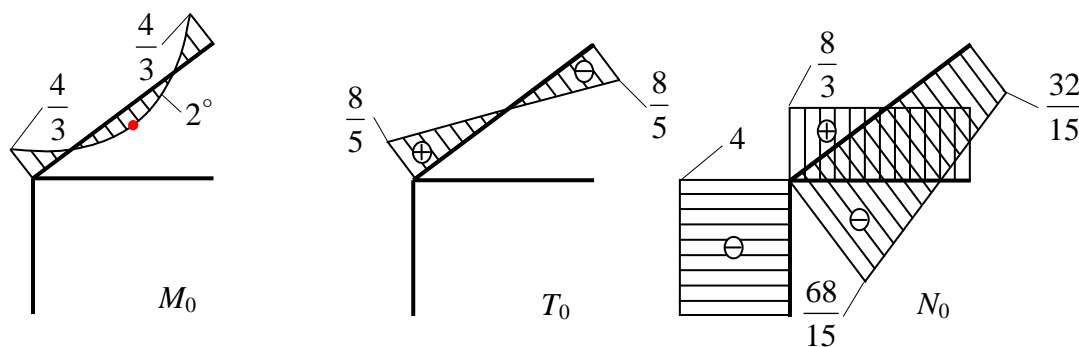


Rys. 14

Na rysunku 14 po prawej stronie w przekrojach przywęzłowych zaznaczone są tylko momenty, ponieważ tylko one występują w poniższym równaniu równowagi. Reakcję r_{10} w miejscu fikcyjnego więzu wyznaczamy z równania sumy momentów dla węzła 1.

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A}^0 + M_{1B}^0 + M_{1C}^0 - r_{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{10} = -\frac{4}{3}ql^2$$

Sporządzamy wykresy M_0 , T_0 oraz N_0 .



Rys. 15

Rzędne wykresu momentu gnącego mnożymy przez ql^2 , a wykresów siły tnącej i normalnej przez ql .

Wartości momentów gnących i sił tnących wyznaczone zostały ze wzorów wyjściowych. Wartości sił normalnych otrzymuje się z równań równowagi zapisanych dla całego układu oraz dla węzłów podporowych, z wykorzystaniem wartości sił tnących.

W połowie długości pręta 1B zeruje się siła tnąca. We wskazanym przekroju moment gnący osiąga ekstremum, które oznaczone jest kolorem czerwonym. Wartość momentu ekstremalnego w stanie zerowym nie jest istotna dla dalszych obliczeń.

Korzystając z zasady superpozycji otrzymamy następujące równanie metody przemieszczeń

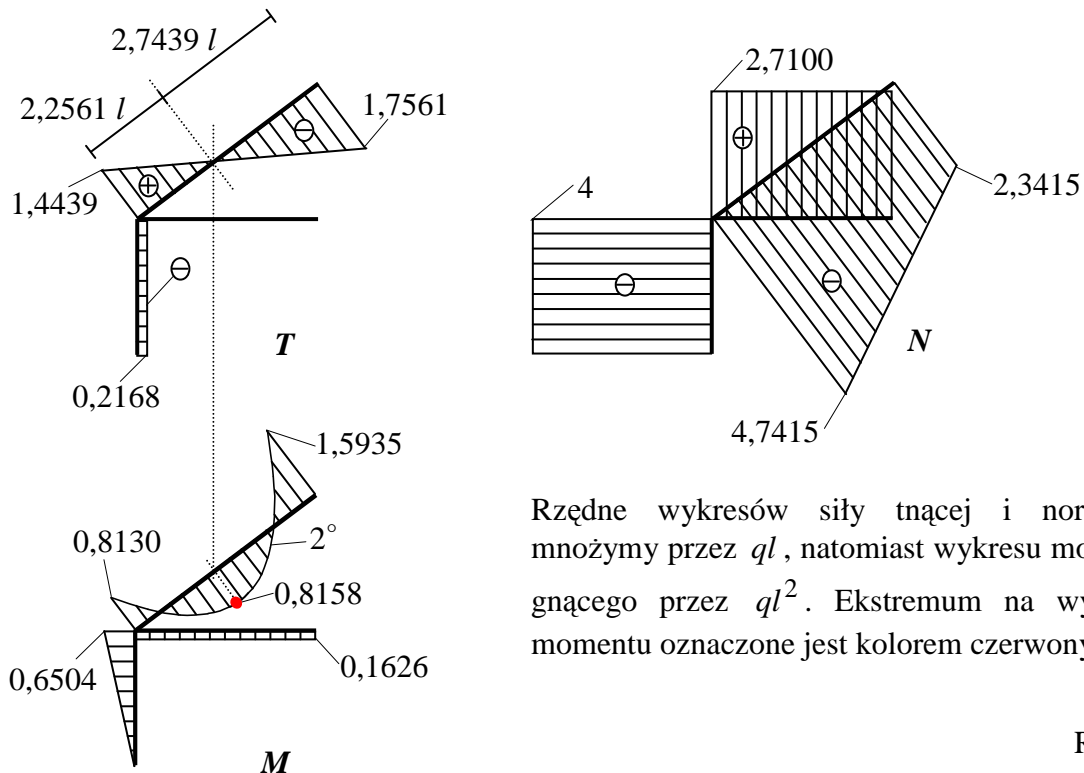
$$r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{10} = 0$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości reakcji fikcyjnej podpory dostajemy

$$\frac{41 EI}{20 l} \cdot \varphi_1 + \left(-\frac{4}{3} ql^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{80}{123} \cdot \frac{ql^3}{EI}$$

Wykresy sił przekrojowych w rzeczywistym układzie geometrycznie niewyznaczalnym sporządzamy korzystając z zasady superpozycji.

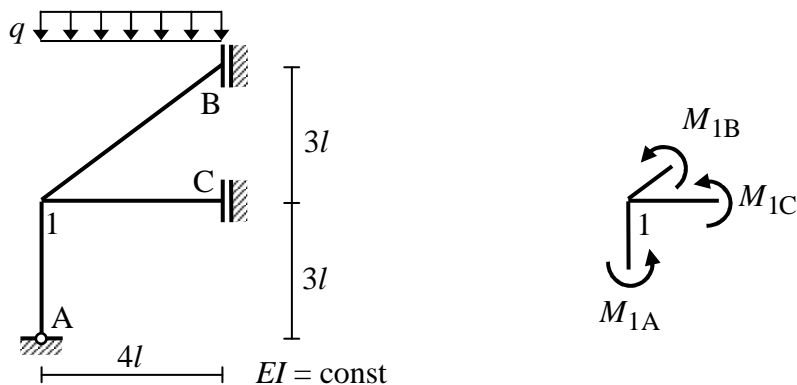
$$N = N_1 \cdot \varphi_1 + N_0 \quad T = T_1 \cdot \varphi_1 + T_0 \quad M = M_1 \cdot \varphi_1 + M_0$$



Rzędne wykresów siły tnącej i normalnej mnożymy przez ql , natomiast wykresu momentu gnącego przez ql^2 . Ekstremum na wykresie momentu oznaczone jest kolorem czerwonym.

Rys. 16

Równanie metody przemieszczeń dla rozważanej ramy możemy otrzymać podstawiając do równania równowagi, stosownego do niewiadomej geometrycznej, siły przekrojowe występujące w przekrojach przywęzłowych.



Rys. 17

Stopień geometrycznej niewyznaczalności układu wynosi $n_g = 1$. Jediną niewiadomą geometryczną jest kąt obrotu węzła 1. W celu wyznaczenia tej niewiadomej wykorzystamy równanie równowagi stosowne do poszukiwanej niewiadomej geometrycznej. W przypadku, gdy niewiadomą jest kąt obrotu węzła 1 zapisujemy równanie sumy momentów działających na węzeł 1 w przekrojach przywęzłowych. Z tego powodu na rysunku 17 zaznaczone są wyłącznie momenty. Otrzymujemy równanie:

$$\sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A} + M_{1B} + M_{1C} = 0$$

Wyznaczamy momenty w przekrojach przywęzłowych korzystając ze wzorów transformacyjnych i wzorów na momenty wyjściowe. Rozpatrywany układ jest nieprzesuwany, a więc kąty obrotu cięciw odkształconych prętów mają wartości zerowe.

$$\psi_{1A} = \psi_{1B} = \psi_{1C} = 0 \quad \text{oraz} \quad \varphi_B = \varphi_C = 0$$

$$M_{1A} = \frac{3EI}{3l}(\varphi_1) + M_{1A}^0 = \frac{EI}{l}\varphi_1 + 0 = \frac{EI}{l}\varphi_1$$

$$M_{1B} = \frac{2EI}{5l}(2\varphi_1) + M_{1B}^0 = \frac{4EI}{5l}\varphi_1 - \frac{1}{12}\left(\frac{16}{25}q\right)(5l)^2 = \frac{4EI}{5l}\varphi_1 - \frac{4}{3}ql^2$$

$$M_{1C} = \frac{EI}{4l}(\varphi_1) + M_{1C}^0 = \frac{EI}{4l}\varphi_1 + 0 = \frac{EI}{4l}\varphi_1$$

Po podstawieniu otrzymujemy równanie, z którego wyznaczamy niewiadomą φ_1 .

$$\begin{aligned} \sum_i M_{i1} = 0: \quad M_{1A} + M_{1B} + M_{1C} = 0 &\Rightarrow \frac{EI}{l}\varphi_1 + \frac{4EI}{5l}\varphi_1 - \frac{4}{3}ql^2 + \frac{1EI}{4l} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{4}{5} + \frac{1}{4}\right) \cdot \varphi_1 \cdot \frac{EI}{l} - \frac{4}{3}ql^2 = 0 &\Rightarrow \frac{41EI}{20l}\varphi_1 - \frac{4}{3}ql^2 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{80}{123} \frac{ql^3}{EI} \end{aligned}$$

Po podstawieniu φ_1 wyznaczamy wartości sił przekrojowych w przekrojach przywęzłowych

$$M_{1A} = \frac{EI}{l}\varphi_1 + M_{1A}^0 = \frac{EI}{l}\left(\frac{80}{123} \frac{ql^3}{EI}\right) + 0 = \frac{80}{123}ql^2 \cong 0,6504ql^2$$

$$M_{1B} = \frac{4EI}{5l}\varphi_1 + M_{1B}^0 = \frac{4EI}{5l}\left(\frac{80}{123} \frac{ql^3}{EI}\right) - \frac{4}{3}ql^2 \cong -0,8130ql^2$$

$$M_{B1} = \frac{2EI}{5l}(\varphi_1) + M_{B1}^0 = \frac{2EI}{5l}\left(\frac{80}{123} \frac{ql^3}{EI}\right) + \frac{4}{3}ql^2 \cong 1,5935ql^2$$

$$M_{1C} = \frac{EI}{4l}\varphi_1 + M_{1C}^0 = \frac{EI}{4l}\left(\frac{80}{123} \frac{ql^3}{EI}\right) + 0 \cong 0,1626ql^2$$

$$M_{C1} = -\frac{EI}{4l} \varphi_1 + M_{C1}^0 = -\frac{EI}{4l} \left(\frac{80}{123} \frac{ql^3}{EI} \right) + 0 \cong -0,1626ql^2$$

$$T_{A1} = -\frac{3EI}{(3l)^2} \varphi_1 + T_{A1}^0 = -\frac{EI}{3l^2} \left(\frac{80}{123} \frac{ql^3}{EI} \right) + 0 = -0,2168ql$$

$$T_{1A} = -\frac{3EI}{(3l)^2} \varphi_1 + T_{1A}^0 = -\frac{EI}{3l^2} \left(\frac{80}{123} \frac{ql^3}{EI} \right) + 0 = -0,2168ql$$

$$T_{1B} = -\frac{6EI}{(5l)^2} \varphi_1 + T_{1B}^0 = -\frac{6EI}{25l^2} \left(\frac{80}{123} \frac{ql^3}{EI} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{25} q \cdot 5l = -\frac{32}{205} ql + \frac{8}{5} ql = \frac{72}{41} ql \cong 1,4439ql$$

$$T_{B1} = -\frac{6EI}{(5l)^2} \varphi_1 + T_{B1}^0 = -\frac{6EI}{25l^2} \left(\frac{80}{123} \frac{ql^3}{EI} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{25} q \cdot 5l = -\frac{32}{205} ql - \frac{8}{5} ql = -\frac{72}{41} ql \cong$$

$$\cong -1,7561ql$$

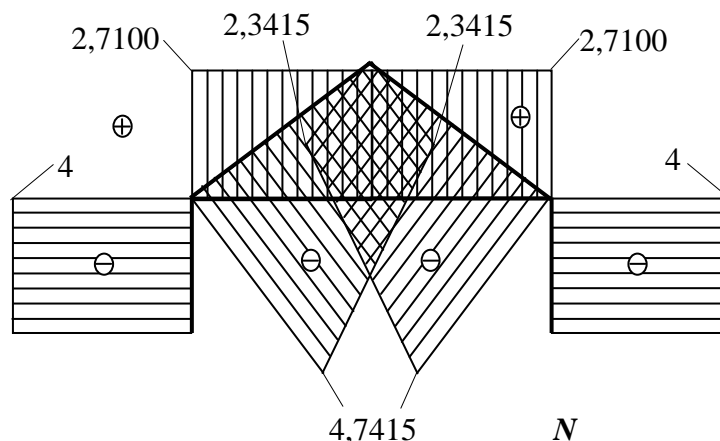
$$T_{1C} = 0 + T_{1C}^0 = 0 + 0 = 0$$

$$T_{C1} = 0 + T_{C1}^0 = 0 + 0 = 0$$

Jak należało się spodziewać, otrzymane wartości sił przekrojowych są identyczne z wyznaczonymi poprzednio. Można również ograniczyć się do wyznaczenia jedynie momentów w przekrojach przywęzłowych z wykorzystaniem wzorów transformacyjnych i wzorów na momenty wyjściowe, a wartości sił tnących w przekrojach przywęzłowych wyznaczyć z równań równowagi dla poszczególnych prętów.

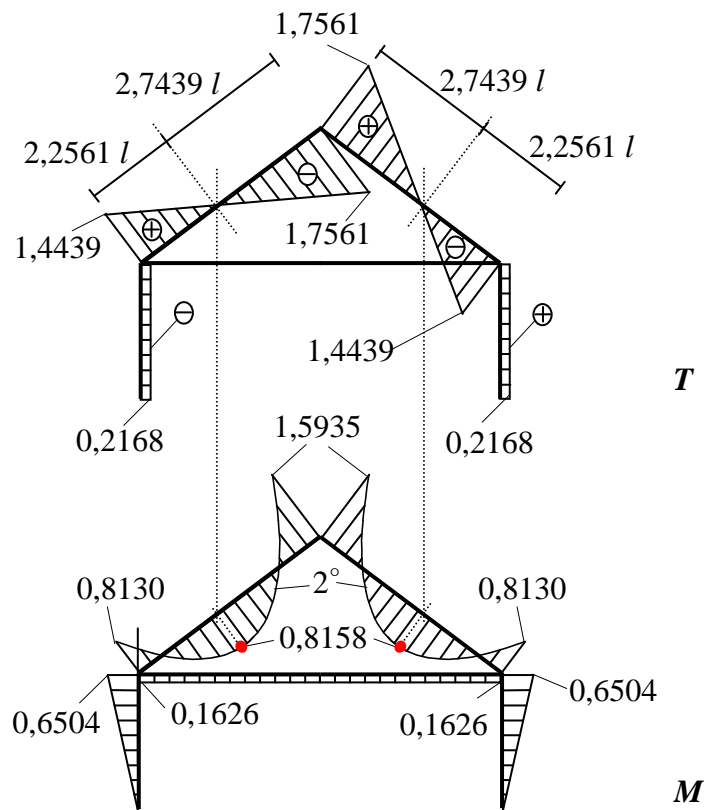
Wartości sił normalnych można otrzymać z równań równowagi zapisanych dla całego układu oraz dla węzłów (w tym podporowych), z wykorzystaniem wartości sił tnących.

Wykresy sił przekrojowych zostały wykonane dla lewego schematu połówkowego. Należy jeszcze sporządzić wykresy w prawej części układu. W układach symetrycznych obciążonych obciążeniem symetrycznym wykresy siły normalnej i momentu gnącego mają charakter symetryczny, natomiast wykres siły tnącej jest antysymetryczny.



Rzędne wykresu siły normalnej mnożymy przez ql .

Rys. 18



Rys. 19

Rzędne wykresu siły tnącej mnożymy przez ql , a wykresu momentu gnącego przez ql^2 . Ekstrema na wykresie momentu oznaczone są kolorem czerwonym.

Należy zauważyć, że wykorzystanie symetrii ramy i obciążenia pozwoliło nam rozwiązać zadanie jako układ jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalny, zamiast jako układ z czterema niewiadomymi geometrycznymi.