## Wprowadzenie

W projektowaniu ram nieodzowne jest sporządzenie wykresów sił przekrojowych. Wykorzystywane są one do wyznaczenia wymiarów przekrojów poprzecznych prętów (stosując warunek wytrzymałości). W układach statycznie niewyznaczalnych nie dysponujemy wystarczającą liczbą równań równowagi do wyznaczenia sił przekrojowych, a w przypadku układów zewnętrznie statycznie niewyznaczalnych również reakcji podporowych. Jedną z metod rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych (układów o nadliczbowych więzach) jest metoda przemieszczeń. W układach nośnych rozwiązywanych tą metodą niewiadomymi są uogólnione przemieszczenia węzłów. Równania, z których wyznaczamy ich wartości, stanowią równania równowagi. Metoda przemieszczeń jest szczególnie efektywna wówczas, gdy ilość niewiadomych geometrycznych (obrotów i przesunięć węzłów) nie przekracza stopnia statycznej niewyznaczalności. Sposób rozwiązywania układu statycznie niewyznaczalnego metodą przemieszczeń jest następujący:

- Określenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu $n_g$.

W przypadku ramy korzystamy ze wzoru

$$n_g = w + p$$

gdzie:

$w$ - liczba węzłów (łączących co najmniej dwa pręty), które mogą doznać obrotu,

$p$ - liczba przesuwów.

Liczba przesuwów $p$ odpowiada liczbie niezbędnych więzów koniecznych do wprowadzenia w łańcuchu kinematycznym, utworzonym z rozpatrywanej ramy, w celu uniemożliwienia wystąpienia przesuwu któregokolwiek przegubu tego łańcucha.

W układzie ramowym mogą wystąpić zarówno węzły przesuwne jak i nieprzesuwne.

- Utworzenie układu podstawowego.

W rozwiązywanym układzie wprowadzamy $n_g$ nadliczbowych więzów, tworząc w ten sposób układ podstawowy geometrycznie wyznaczalny. W układzie geometrycznie wyznaczalnym obroty i przesuwy węzłów są równe zeru.

- Obciążenie układu podstawowego.

Układ podstawowy jest równoważny rzeczywistemu układowi, jeżeli poza obciążeniem zewnętrznym działającym na układ, w miejscach wprowadzonych nadliczbowych więzów uwzględnimy występujące tam obroty i przesuwy $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_i, ...\Delta_{n_g-1}, \Delta_{n_g}$ .

- Wyznaczenie współczynników przy niewiadomych (reakcje nadliczbowych węzłów) i wyrazów wolnych układu równań metody przemieszczeń.

Układ podstawowy jest pod względem statycznym równoważny rozpatrywanemu układowi geometrycznie niewyznaczalnemu, jeżeli pod wpływem obciążenia zewnętrznego oraz niewiadomych nadliczbowych $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_i, ...\Delta_{n_g-1}, \Delta_{n_g}$ siły uogólnione w układzie podstawowym w miejscach wprowadzonych $n_g$ więzów są równe zeru. Przyjmijmy założenie, że rozpatrywana konstrukcja wykonana jest z materiału liniowo-sprężystego. Korzystając z zasady superpozycji otrzymamy następujący układ $n_g$ równań z $n_g$ niewiadomymi:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1i} & \cdots & r_{1n_g-1} & r_{1n_g} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2i} & \cdots & r_{2n_g-1} & r_{2n_g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ii} & \cdots & r_{in_g-1} & r_{in_g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n_g-11} & r_{n_g-12} & \cdots & r_{n_g-1i} & \cdots & r_{n_g-1n_g-1} & r_{n_g-1n_g} \\ r_{n_g1} & r_{n_g2} & \cdots & r_{n_gi} & \cdots & r_{n_gn_g-1} & r_{n_gn_g} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdots \\ \varphi_i \\ \cdots \\ \Delta_{n_g-1} \\ \Delta_{n_g} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_{10} \\ r_{20} \\ \cdots \\ r_{i0} \\ \cdots \\ r_{n_g-10} \\ r_{n_g0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

gdzie:

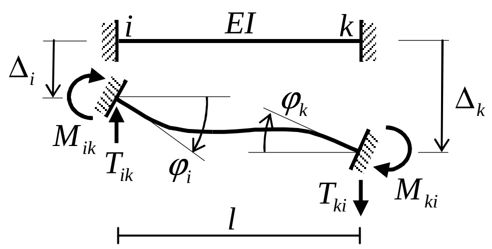
$r_{jk}$ - reakcja uogólniona odpowiadająca nadliczbowej $\varphi_j$ (lub $\Delta_j$) wywołana działaniem nadliczbowej $\varphi_k = 1$ (lub $\Delta_k = 1$),

$r_{j0}$ - reakcja uogólniona odpowiadająca nadliczbowej $\varphi_j$ (lub $\Delta_j$) wywołana działaniem obciążenia zewnętrznego.

Macierz współczynników przy niewiadomych $r_{jk}$ jest symetryczna ($r_{jk} = r_{kj}$). Wynika to z twierdzenia o wzajemności reakcji.

Wyznaczając współczynniki przy niewiadomych $r_{jk}$ oraz wyrazy wolne $r_{j0}$ powyższego układu równań korzystamy ze wzorów transformacyjnych oraz ze wzorów na momenty i siły tnące wyjściowe.

Wzory transformacyjne

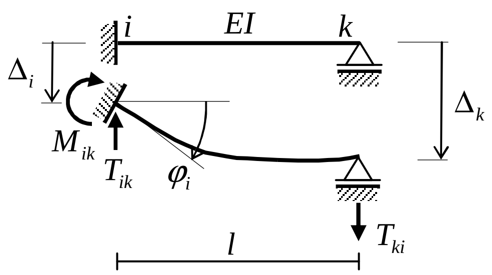



$$M_{ik} = \frac{2EI}{l}\left(2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi\right)$$

$$M_{ki} = \frac{2EI}{l}\left(\varphi_i + 2\varphi_k - 3\psi\right)$$

$$T_{ik} = T_{ki} = -\frac{6EI}{l^2}\left(\varphi_i + \varphi_k - 2\psi\right)$$

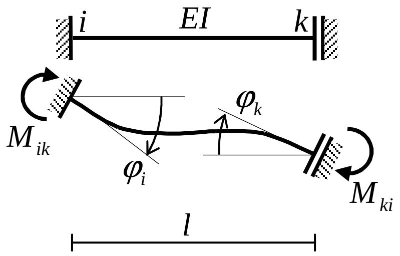
gdzie $\psi = \frac{\Delta_k - \Delta_i}{l}$




$$M_{ik} = \frac{3EI}{l}\left(\varphi_i - \psi\right)$$

$$T_{ik} = T_{ki} = -\frac{3EI}{l^2}\left(\varphi_i - \psi\right)$$

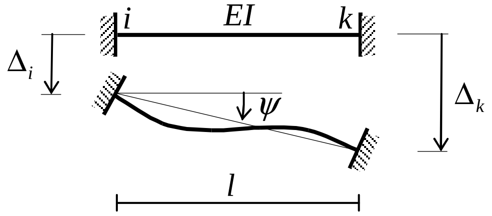
gdzie $\psi = \frac{\Delta_k - \Delta_i}{l}$




$$M_{ik} = \frac{EI}{l}\left(\varphi_i - \varphi_k\right)$$

$$M_{ki} = \frac{EI}{l}\left(-\varphi_i + \varphi_k\right)$$

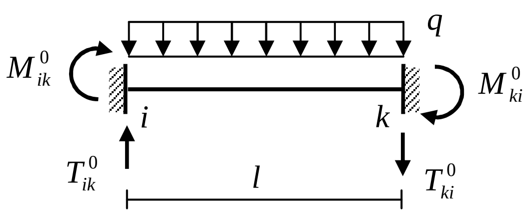
W powyższych wzorach $\psi$ oznacza kąt obrotu cięciwy odkształconego pręta.




$$\psi = \frac{\Delta_k - \Delta_i}{l}$$

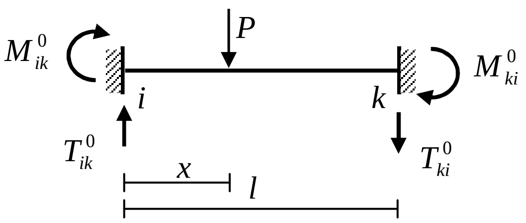
Kąty obrotu węzłów i kąty obrotu cięciw są dodatnie, jeżeli mają zwrot zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Zwroty dodatnich momentów i sił tnących w przekrojach przywęzłowych pręta są zgodne z podanymi na powyższych rysunkach.

Momenty i siły tnące wyjściowe




$$M_{ik}^0 = -\frac{1}{12}ql^2, \quad M_{ki}^0 = \frac{1}{12}ql^2$$

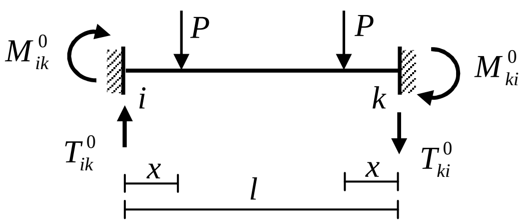
$$T_{ik}^0 = \frac{1}{2}ql, \quad T_{ki}^0 = -\frac{1}{2}ql$$




$$M_{ik}^0 = -Pl\xi\xi'^2, \quad M_{ki}^0 = Pl\xi\xi'^2$$

$$T_{ik}^0 = P\xi'^2\left(3 - 2\xi'\right), T_{ki}^0 = -P\xi^2\left(3 - 2\xi\right)$$

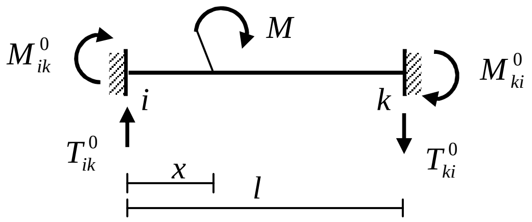
gdzie $\xi = \frac{x}{l}$, $\xi' = \frac{l-x}{l}$




$$M_{ik}^0 = -Pl\xi\xi', \quad M_{ki}^0 = Pl\xi\xi'$$

$$T_{ik}^0 = P, \quad T_{ki}^0 = -P$$

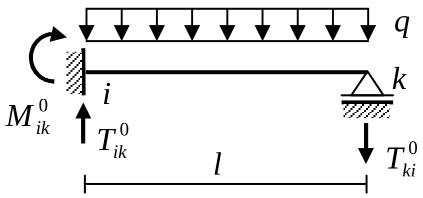
gdzie $\xi = \frac{x}{l}$, $\xi' = \frac{l-x}{l}$




$$M_{ik}^0 = M\xi'\left(2 - 3\xi'\right), \quad M_{ki}^0 = M\xi\left(2 - 3\xi\right)$$

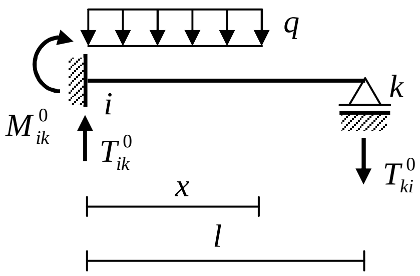
$$T_{ik}^0 = T_{ki}^0 = -\frac{6M}{l}\xi\xi'$$

gdzie $\xi = \frac{x}{l}$, $\xi' = \frac{l-x}{l}$




$$M_{ik} = -\frac{1}{8} q l^2$$

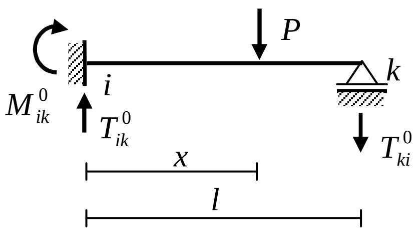
$$T_{ik} = \frac{5}{8} ql, \quad T_{ki} = -\frac{3}{8} ql$$




$$M_{ik}^0 = -\frac{qx^2}{8}(2-\xi)^2$$

$$T_{ik}^0 = \frac{qx}{8}\left(8 - 4\xi^2 + \xi^3\right), \quad T_{ki}^0 = -\frac{qx}{8}\xi^2(4-\xi)$$

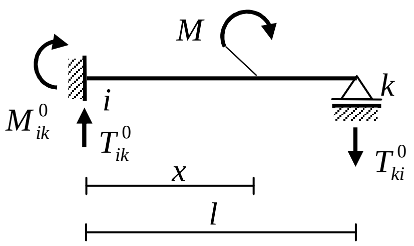
gdzie $\xi = \dfrac{x}{l}$




$$M_{ik}^0 = -\frac{1}{2} Pl\xi\xi'(2-\xi)$$

$$T_{ik}^0 = \frac{P}{2}\xi'\left(3-\xi'^2\right), \quad T_{ki}^0 = -\frac{P}{2}\xi^2(3-\xi)$$

gdzie $\xi = \dfrac{x}{l}, \quad \xi' = \dfrac{l-x}{l}$




$$M_{ik}^0 = \frac{M}{2}\left(1-3\xi'^2\right)$$

$$T_{ik}^0 = T_{ki}^0 = -\frac{3M}{2l}\xi(2-\xi)$$

gdzie $\xi = \dfrac{x}{l}, \quad \xi' = \dfrac{l-x}{l}$

Dla innych przypadków obciążeń należy zastosować wzory zamieszczone w podręcznikach omawiających metodę przemieszczeń.

Uwaga


Wzory transformacyjne dla powyższych prętów są identyczne z uwzględnieniem zmiany przekroju przywęzłowego *ik* na *ki* oraz kąta $\varphi_i$ na $\varphi_k$. Korzystając natomiast ze wzorów na momenty i siły tnące wyjściowe należy pamiętać o różnicach w znakach dla obu schematów.