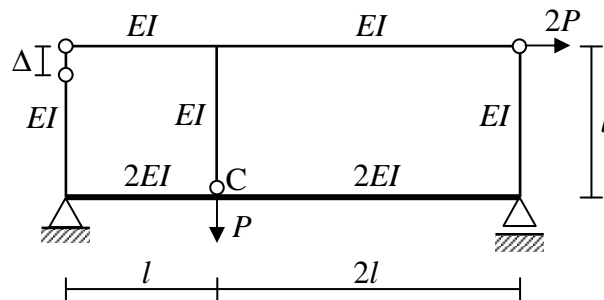


### Przykład 8.3. Rama płaska trzykrotnie statycznie niewyznaczalna

Polecenie: korzystając z metody sił sporządzić wykresy sił przekrojowych dla poniższej ramy. Wyznaczyć przemieszczenie punktu C.



Rys. 1

Rozwiązanie zadania rozpoczynamy od obliczenia stopnia statycznej niewyznaczalności układu. Dla ramy płaskiej, w której pręty (lub część prętów) tworzą układ zamknięty bądź układy zamknięte, stosujemy wzór

$$n = r + 3 \cdot z - p - 3$$

gdzie:

$r$  - liczba składowych reakcji podpór

$z$  - liczba układów zamkniętych

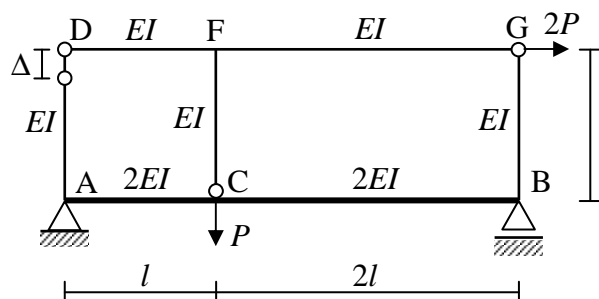
$p$  - liczba połączeń między podukładami (przegubów, teleskopów i tulei).

W rozpatrywanym układzie

$$n = 3 + 3 \cdot 2 - 3 - 3 = 3$$

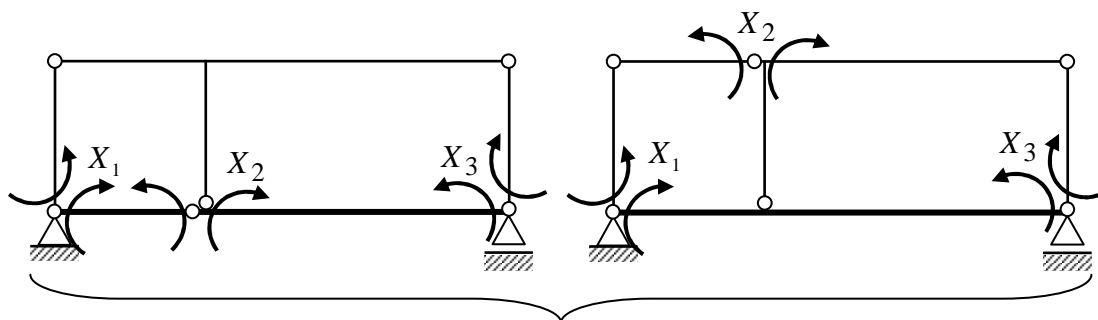
Ze względu na brak relacji między  $P$ ,  $EI$ ,  $l$  oraz  $\Delta$  zadanie należy rozwiązać rozpatrując osobno obciążenie siłami skupionymi oraz obciążenie błędem montażowym  $\Delta$ . W obu przypadkach przyjmujemy ten sam układ podstawowy. Rozpatrywany układ jest zewnętrze statycznie wyznaczalny. Wynika stąd, że jako nadliczbowe mogą być przyjęte wyłącznie siły przekrojowe występujące w wybranych przekrojach.

Wprowadzamy oznaczenia podpór (A, B), węzłów sztywnych (A, B, C, F) oraz połączeń przegubowych (C, D, G).



Rys. 2

Rozpatrywany układ jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalny. Tworzymy układ podstawowy statycznie wyznaczalny przez usunięcie trzech nadliczbowych więzów. Musi to być układ geometrycznie niezmienny. Istnieje wiele takich schematów. Poniżej podano dwa przykłady.

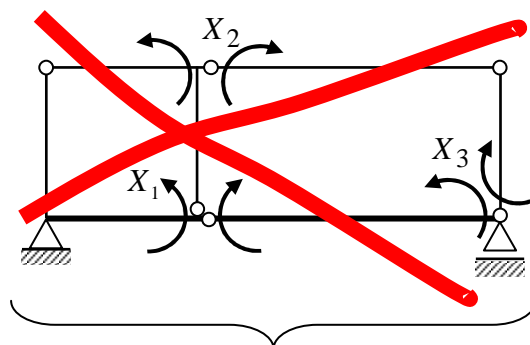


Układy geometrycznie niezmiennie

Rys. 3

Jako układ podstawowy przyjmujemy pierwszy spośród powyższych, geometrycznie niezmiennych układów. Po usunięciu więzów musimy sprawdzić, czy otrzymany układ jest geometrycznie niezmienny. Układ geometrycznie zmienny nie może być układem podstawowym.

Poniżej pokazany jest układ geometrycznie zmienny otrzymany po usunięciu trzech więzów w rozpatrywanej, trzykrotnie statycznie niewyznaczalnej ramie.

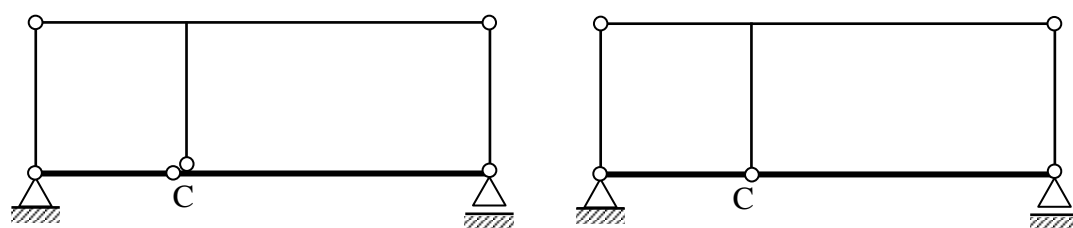


Układ geometrycznie zmienny

Rys. 4

Wykresy sił przekrojowych nie zależą od przyjętego układu podstawowego. Wybór tego układu jest jednak istotny, ponieważ od niego zależy, czy wyznaczenie współczynników przy niewiadomych (nadliczbowych) oraz wyrazów wolnych w układzie równań metody sił jest mniej lub bardziej pracochłonne.

Ze względu na przyjęcie drugiego stopnia swobody nieskończenie blisko rzeczywistego połączenia przegubowego dolnego ryglu ze środkowym słupkiem w punkcie C, możemy na schemacie układu podstawowego narysować przegub łączący trzy pręty (prawy schemat na rysunku 5).

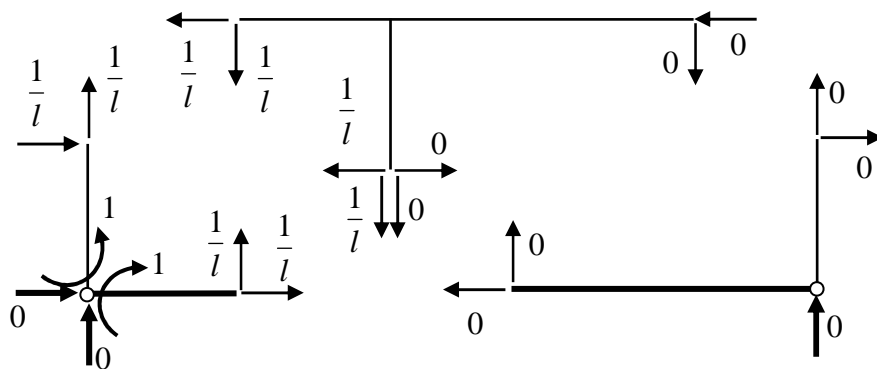
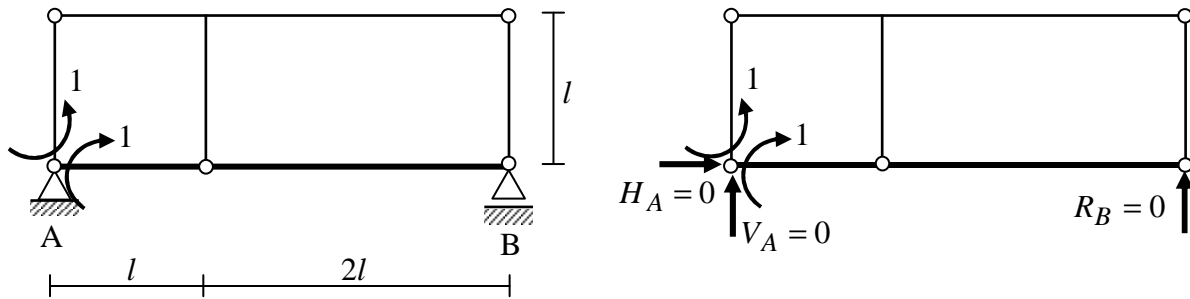


Rys. 5

W pierwszej kolejności zajmiemy się wyznaczeniem wykresów sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym, na który działają siły skupione. W tym celu rozpatrujemy kolejne stany:  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$ ,  $X_3 = 1$  oraz stan zerowy.

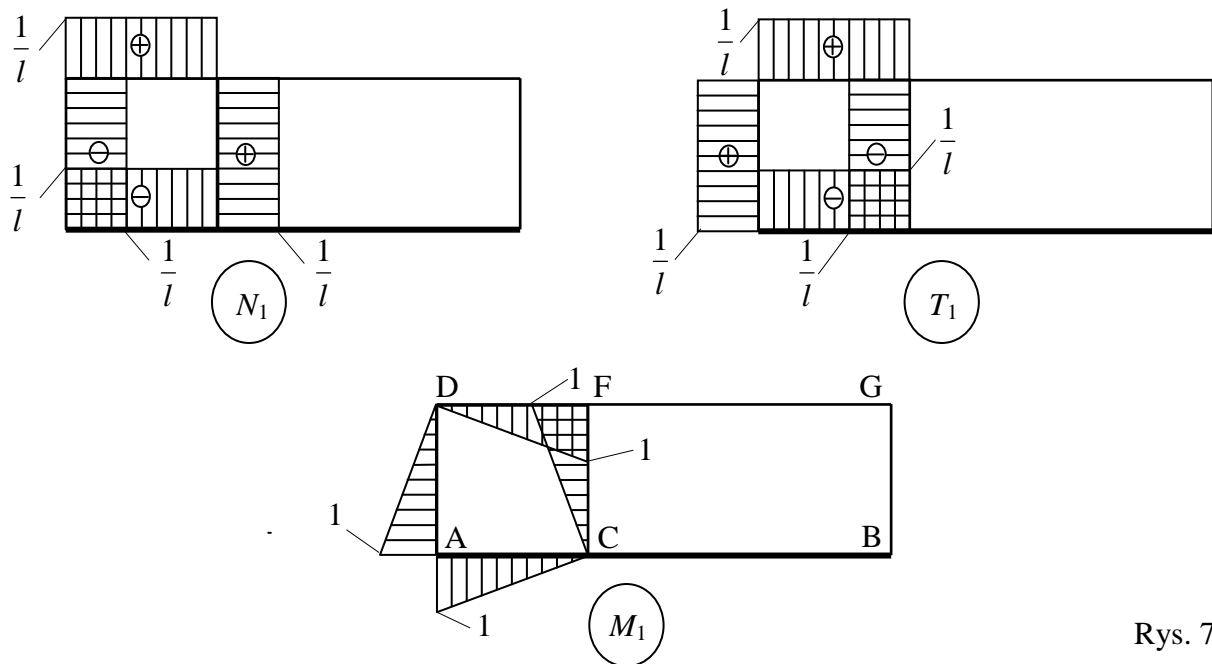
Stan  $X_1 = 1$

W układzie obciążonym przez jednostkowe momenty  $X_1 = 1$  wyznaczamy reakcje podporowe, oddziaływania w połączeniach, a następnie wykonujemy wykresy sił przekrojowych.



Rys. 6

Wykresy sił przekrojowych

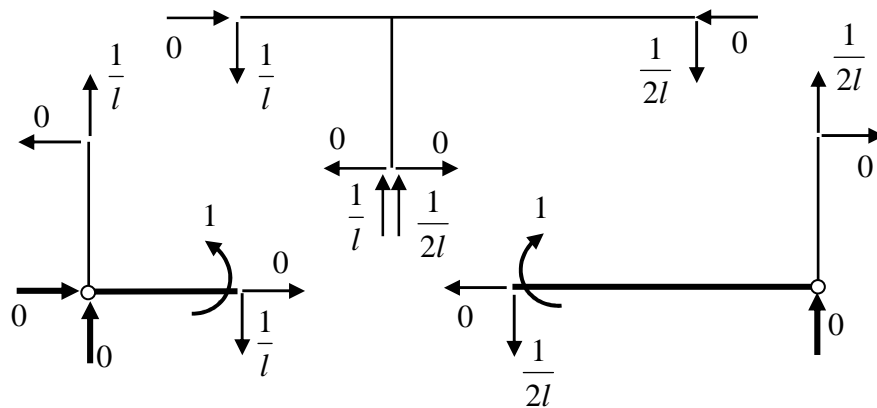
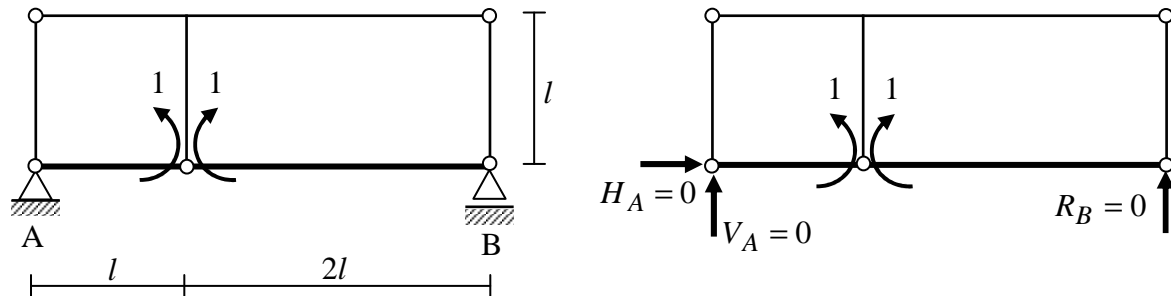


Rys. 7

Oznaczenia węzłów i przegubów ułatwiają kontrolę poprawności obliczenia całek w poszczególnych przedziałach układu.

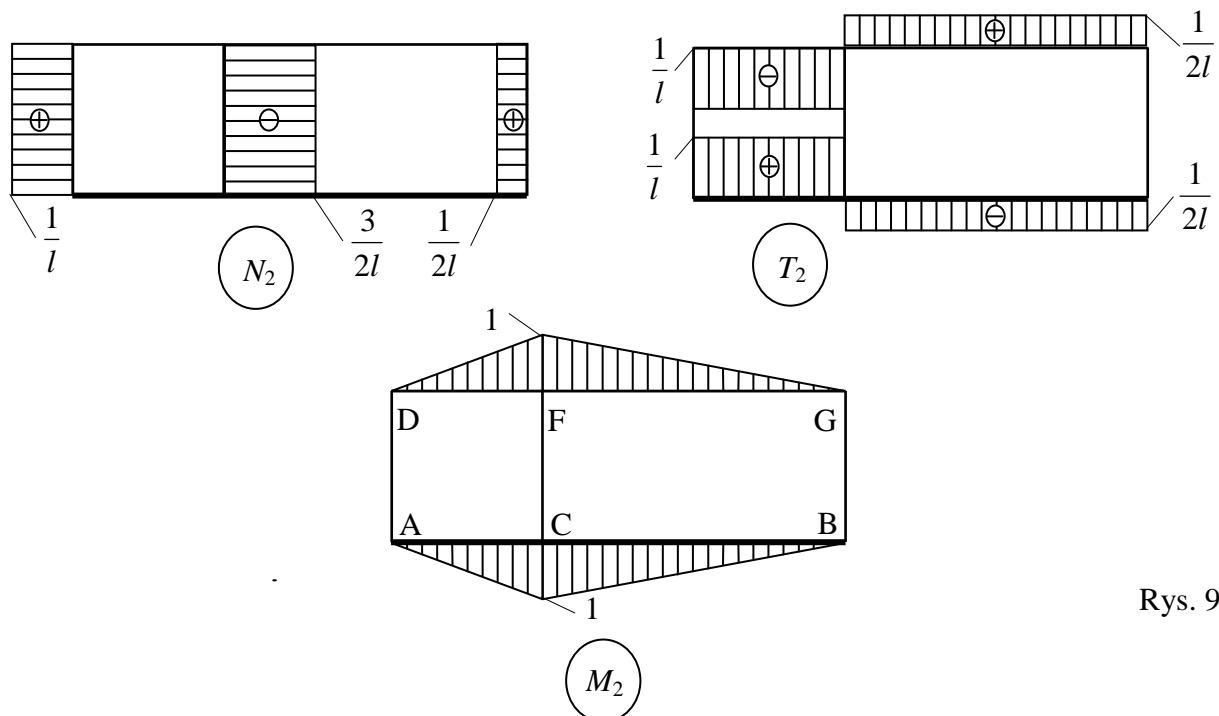
Stan  $X_2 = 1$

W układzie obciążonym przez jednostkowe momenty  $X_2 = 1$  wyznaczamy reakcje podporowe, oddziaływania w połączeniach, a następnie wykonujemy wykresy sił przekrojowych.



Rys. 8

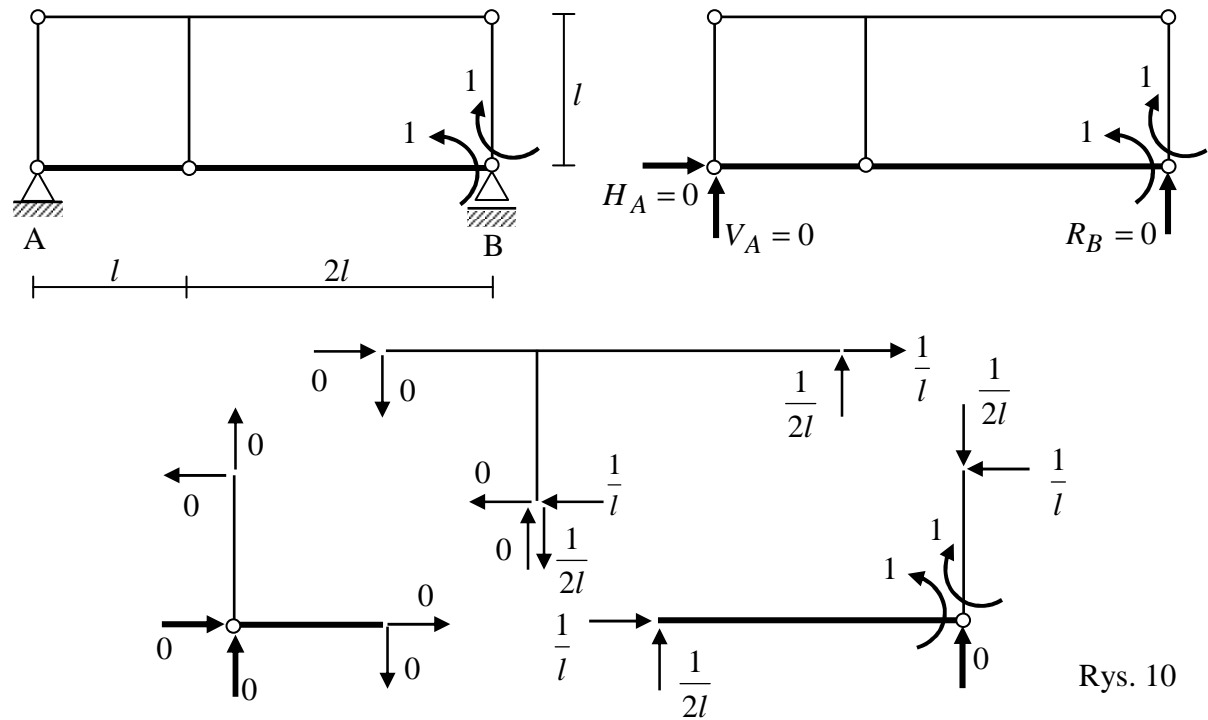
Wykresy sił przekrojowych



Rys. 9

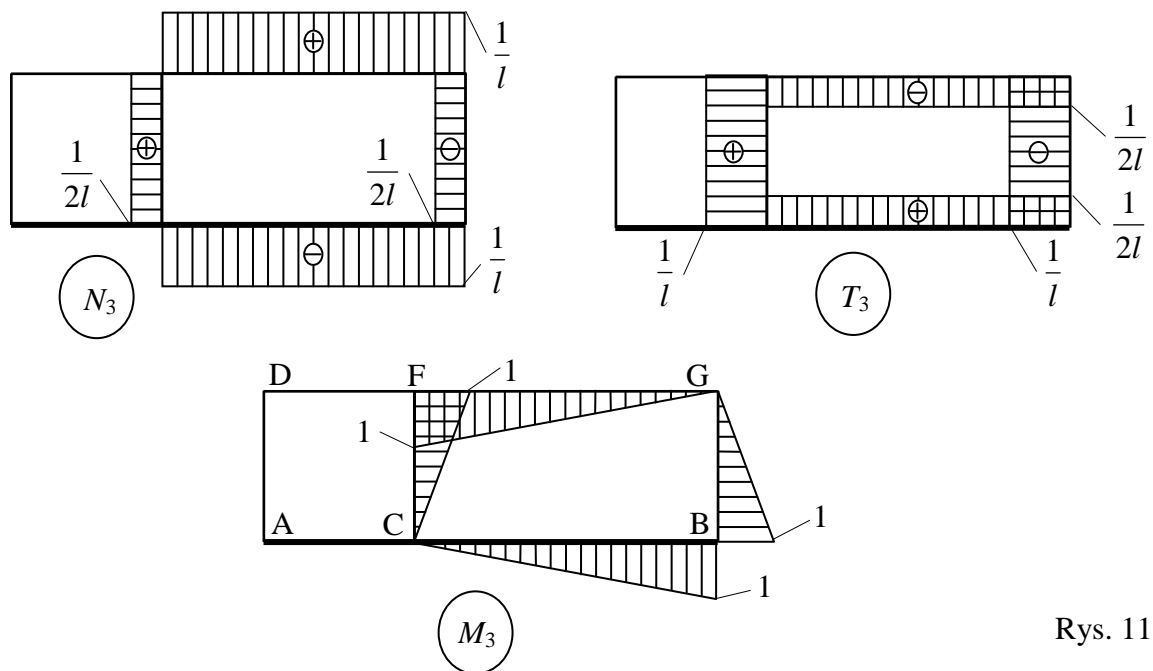
Stan  $X_3 = 1$

W układzie obciążonym przez jednostkowe momenty  $X_3 = 1$  wyznaczamy reakcje podporowe, oddziaływania w połączeniach, a następnie wykonujemy wykresy sił przekrojowych.



Rys. 10

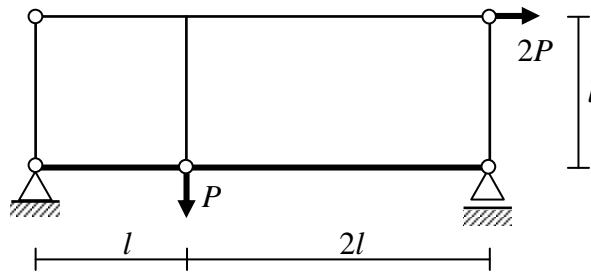
Wykresy sił przekrojowych



Rys. 11

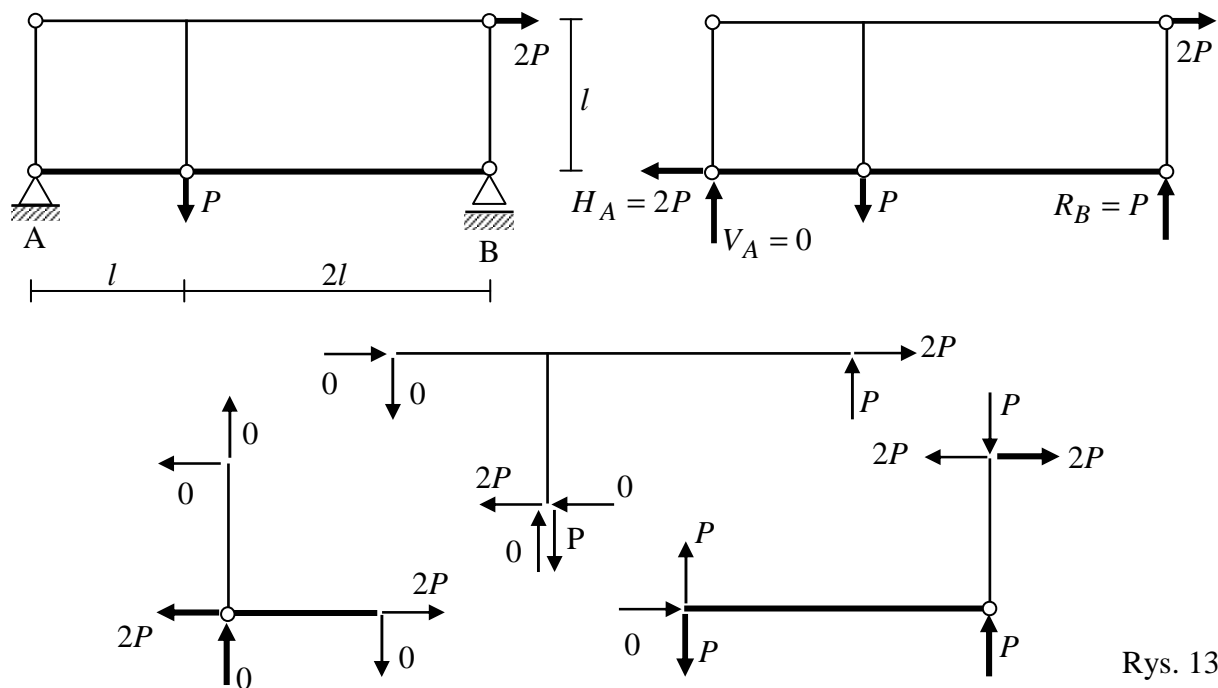
Stan zerowy

Układ podstawowy obciążony dwiema siłami  $P$  i  $2P$ .



Rys. 12

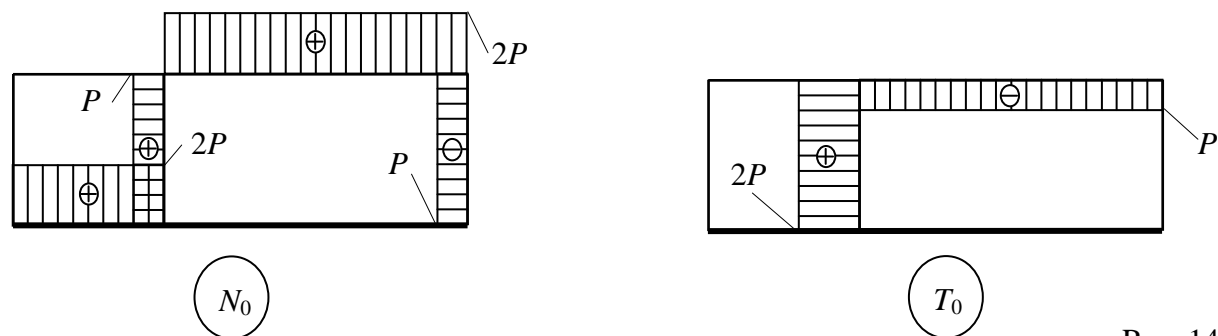
Wyznaczamy reakcje podporowe, oddziaływania w połączeniach, a następnie wykonujemy wykresy sił przekrojowych.



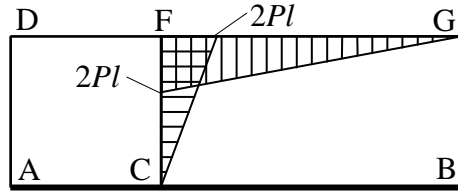
Rys. 13

Obciążenie zewnętrzne i reakcje zaznaczone są grubszyimi strzałkami, a oddziaływania w połączeniach podukładów cieńszymi (rysunek 13).

Wykresy sił przekrojowych



Rys. 14



Rys. 15

Wartość całek  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{33}$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21}$ ,  $\delta_{13} = \delta_{31}$ ,  $\delta_{23} = \delta_{32}$  oraz  $\delta_{10}$ ,  $\delta_{20}$ ,  $\delta_{30}$  wyznaczymy korzystając ze wzoru Wereszczagina.

$$\delta_{11} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)}_{AD, DF, CF} + \underbrace{\frac{1}{2EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)}_{AC} = \frac{7}{6} \cdot \frac{l}{EI}$$

$$\delta_{22} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_2 M_2}{EI} ds = \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)}_{DF} + \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)}_{FG} + \underbrace{\frac{1}{2EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)}_{AC} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)}_{CB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{EI}$$

$$\delta_{33} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_3 M_3}{EI} ds = \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)}_{CF} + \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)}_{FG} + \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)}_{GB} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)}_{CB} = \frac{5}{3} \cdot \frac{l}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_1 M_2}{EI} ds = -\underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}_{DF} + \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot 1}_{AC} = -\frac{1}{4} \frac{l}{EI}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_1 M_3}{EI} ds = -\underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}_{CF} = -\frac{1}{3} \frac{l}{EI}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_2 M_3}{EI} ds = -\underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}_{FG} + \underbrace{\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot 1}_{CB} = -\frac{1}{2} \frac{l}{EI}$$

Zauważmy, że wyrazy macierzy podatności zawierają identyczne mnożniki. Ma to związek z przyjętym układem podstawowym, w którym wszystkie nadliczbowe są momentami działającymi w wybranych przekrojach. W rozpatrywanym przykładzie wyrazy macierzy podatności, znajdujące się poza główną przekątną są ujemne. Wynika to wyłącznie z przyjętych zwrotów nadliczbowych.

Przystępujemy do wyznaczenia wyrazów wolnych układu równań metody sił.

$$\delta_{10} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_1 M_0}{EI} ds = - \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2Pl \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}_{CF} = - \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$$

$$\delta_{20} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_2 M_0}{EI} ds = - \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2Pl \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}_{FG} = - \frac{4}{3} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$$

$$\delta_{30} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_3 M_0}{EI} ds = \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2Pl \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}_{FG} + \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2Pl \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}_{FG} = 2 \cdot \frac{Pl^2}{EI}$$

Układ równań metody sił ma postać

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{33}$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21}$ ,  $\delta_{13} = \delta_{31}$ ,  $\delta_{23} = \delta_{32}$  oraz  $\delta_{10}$ ,  $\delta_{20}$ ,  $\delta_{30}$  otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{6} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} \\ -\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{EI} & \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EI} \\ -\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EI} & \frac{5}{3} \cdot \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^2}{EI} \\ -\frac{4}{3} \cdot \frac{Pl^2}{EI} \\ 2 \cdot \frac{Pl^2}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Otrzymujemy rozwiązanie układu równań w postaci

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} \\ -\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{EI} & \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EI} \\ -\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EI} & \frac{5}{3} \cdot \frac{l}{EI} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -\left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^2}{EI}\right) \\ -\left(-\frac{4}{3} \cdot \frac{Pl^2}{EI}\right) \\ -\left(2 \cdot \frac{Pl^2}{EI}\right) \end{Bmatrix}$$



Wyznaczamy macierz odwrotną

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{6} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} \\ -\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{EI} & \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EI} \\ -\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EI} & \frac{5}{3} \cdot \frac{l}{EI} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{108}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{28}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{30}{109} \cdot \frac{EI}{l} \\ \frac{28}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{88}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{32}{109} \cdot \frac{EI}{l} \\ \frac{30}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{32}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{81}{109} \cdot \frac{EI}{l} \end{bmatrix}$$

Nadliczbowe mają następujące wartości

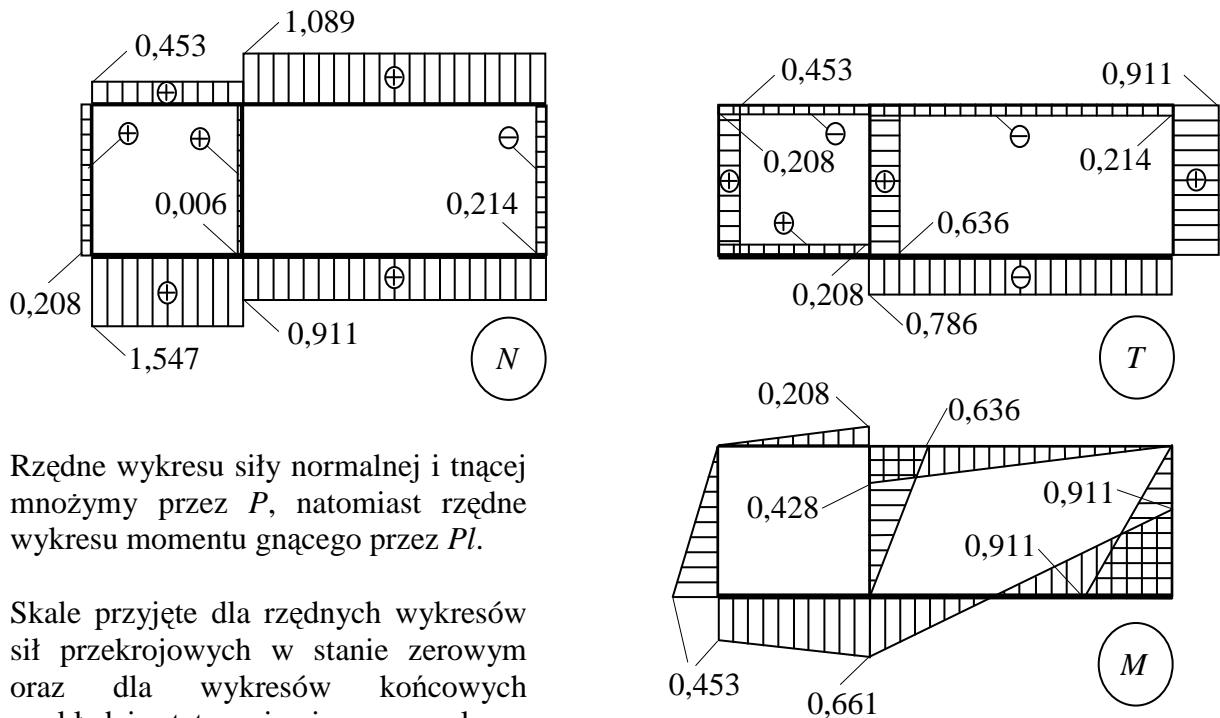
$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{108}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{28}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{30}{109} \cdot \frac{EI}{l} \\ \frac{28}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{88}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{32}{109} \cdot \frac{EI}{l} \\ \frac{30}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{32}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{81}{109} \cdot \frac{EI}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^2}{EI} \\ \frac{4}{3} \cdot \frac{Pl^2}{EI} \\ -2 \cdot \frac{Pl^2}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{148}{327} \cdot Pl \\ \frac{216}{327} \cdot Pl \\ -\frac{298}{327} \cdot Pl \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} 0,453 \cdot Pl \\ 0,661 \cdot Pl \\ -0,991 \cdot Pl \end{Bmatrix}$$

Rzędne wykresów sił przekrojowych wyznaczamy korzystając z zasady superpozycji.

$$N = N_1 \cdot X_1 + N_2 \cdot X_2 + N_3 \cdot X_3 + N_0 \quad T = T_1 \cdot X_1 + T_2 \cdot X_2 + T_3 \cdot X_3 + T_0$$

$$M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_3 \cdot X_3 + M_0$$

Wykresy sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym



Rzędne wykresu siły normalnej i tnącej mnożymy przez  $P$ , natomiast rzędne wykresu momentu gnącego przez  $Pl$ .

Skale przyjęte dla rzędnych wykresów sił przekrojowych w stanie zerowym oraz dla wykresów końcowych w układzie statycznie niewyznaczalnym są różne.

Rys. 16

Po wykonaniu wykresu momentu gnącego dla układu statycznie niewyznaczalnego obciążonego siłami  $P$  i  $2P$  można przystąpić do wyznaczenia przemieszczenia punktu C. Wykorzystamy pierwsze twierdzenie redukcyjne.

W myśl pierwszego twierdzenia redukcyjnego siły przekrojowe od obciążenia wirtualnego możemy wyznaczyć w dowolnym układzie statycznie wyznaczalnym, otrzymanym poprzez likwidację nadliczbowych więzów rozważanego układu statycznie niewyznaczalnego. Dla ram bez skratowania, które są obciążone wyłącznie siłami skupionymi, wzór na przemieszczenie ma postać:

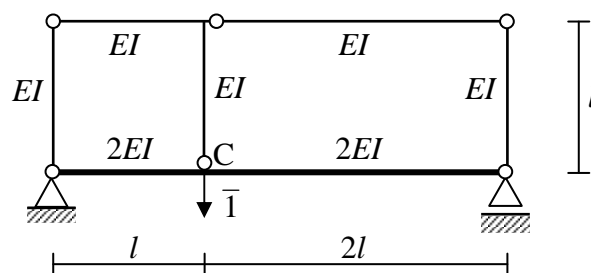
$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}^{(0)} M}{E_i I_i} ds$$

gdzie

$M$ , - momenty gnące wywołane działaniem obciążenia rzeczywistego w układzie statycznie niewyznaczalnym

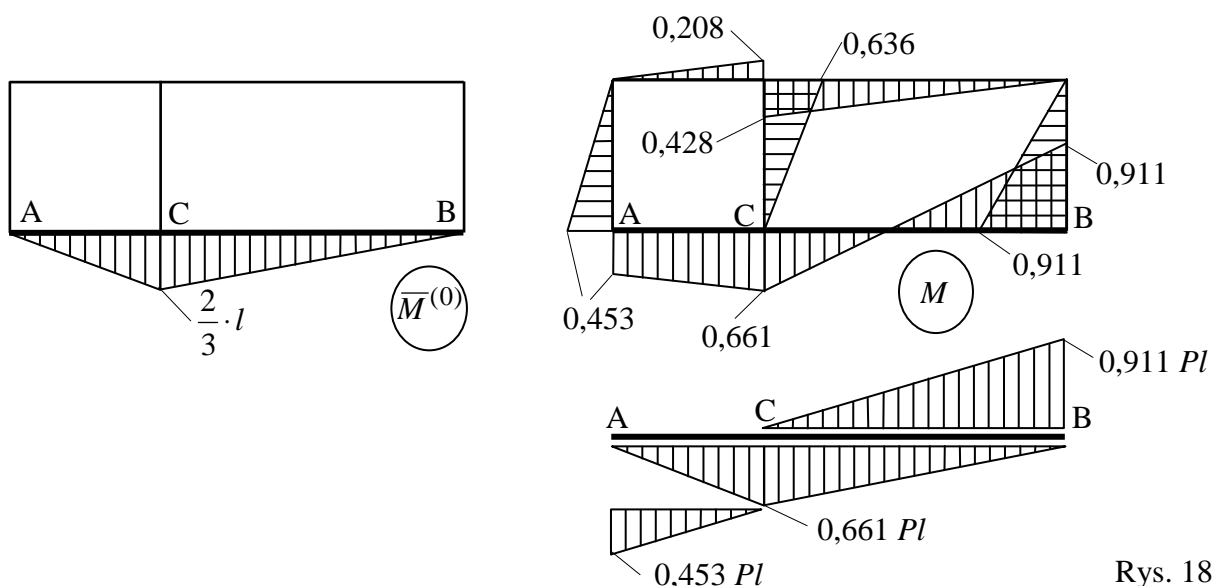
$\bar{M}^{(0)}$  - momenty gnące wywołane działaniem obciążenia wirtualnego w postaci jednostkowej siły uogólnionej w układzie statycznie wyznaczalnym.

Składowa pozioma przemieszczenia punktu C jest równa zero. W celu wyznaczenia przemieszczenia wskazanego punktu wystarczy wyznaczyć składową pionową. Układ statycznie wyznaczalny obciążamy jednostkową siłą o kierunku pionowym.



Rys. 17

Układ, do którego przykładamy jednostkowe obciążenie wirtualne nie musi być identyczny z wcześniej przyjętym układem podstawowym. Górna część powyższego układu nie jest obciążona. Wykres  $\bar{M}^{(0)}$  ma niezerowe rzędne wyłącznie na dolnym ryglu ramy.



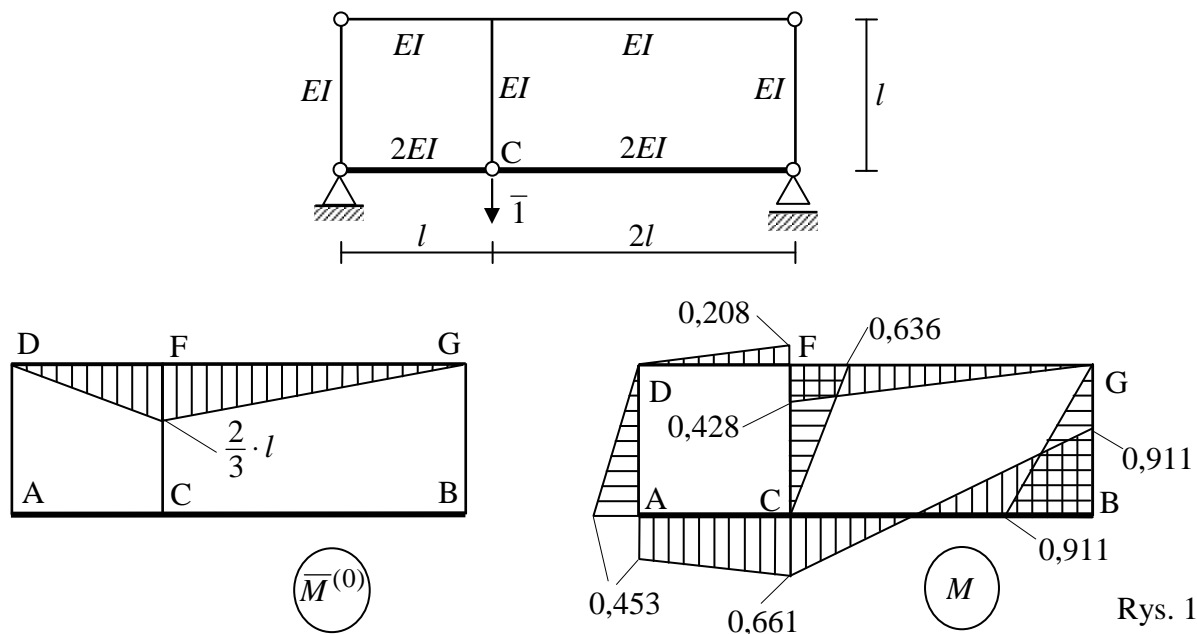
Rys. 18

Na rysunku 18 pokazany jest również podział figur pod wykresem momentu giębnego od obciążenia rzeczywistego  $M$  w przedziałach AC i CB.

$$v_C = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}^{(0)} M}{E_i I_i} ds = \frac{1}{2EI} \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{2} \cdot 0,453Pl \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}l + \frac{1}{2} \cdot 0,661Pl \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}l \right)}_{AC} +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{2} \cdot 0,661Pl \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}l - \frac{1}{2} \cdot 0,911Pl \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}l \right)}_{CB} \cong 0,144 \frac{Pl^3}{EI}$$

W celu przekonania się, że wybór układu statycznie wyznaczalnego, który obciążamy wirtualnym obciążeniem jednostkowym, nie ma wpływu na otrzymaną wartość przemieszczenia, przeprowadzimy obliczenia powtórnie. Tym razem jednostkową siłą działającą w punkcie C przyłożymy w układzie podstawowym.

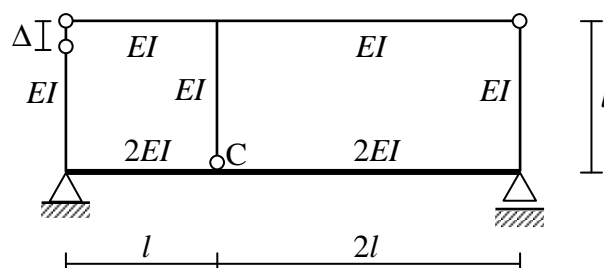


Rys. 19

Rzędne wykresu momentu giębnego w układzie statycznie niewyznaczalnym od obciążenia siłami skupionymi mnożymy przez  $Pl$ . Obliczenia są mniej pracochłonne.

$$v_C = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}^{(0)} M}{E_i I_i} ds = \frac{1}{EI} \cdot \left( \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot 0,208Pl \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}l}_{DF} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 0,428Pl \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}l}_{FG} \right) \cong 0,144 \frac{Pl^3}{EI}$$

Obciążenie błędem montażowym



Rys. 20

W rozwiązywanym zadaniu poza obciążeniem siłami skupionymi występuje również obciążenie błędem montażowym. Lewy słupek ramy jest o  $\Delta$  za krótki w stosunku do długości zaprojektowanej. W układzie statycznie niewyznaczalnym tego typu obciążenie powoduje powstanie sił przekrojowych.

Przyjmujemy ten sam układ podstawowy. Możemy wykorzystać wcześniejsze rozwiązanie dla stanów  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$ ,  $X_3 = 1$  oraz wyznaczoną macierz podatności.

W stanie zerowym układ podstawowy, będący układem statycznie wyznaczalnym, poddany jest działaniu obciążenia błędem montażowym. W takim przypadku rzędne na wykresach  $N_0$ ,  $T_0$ ,  $M_0$  są zerowe, natomiast wyrazy wolne układu równań metody sił wyznaczamy zgodnie z poniższym wzorem.

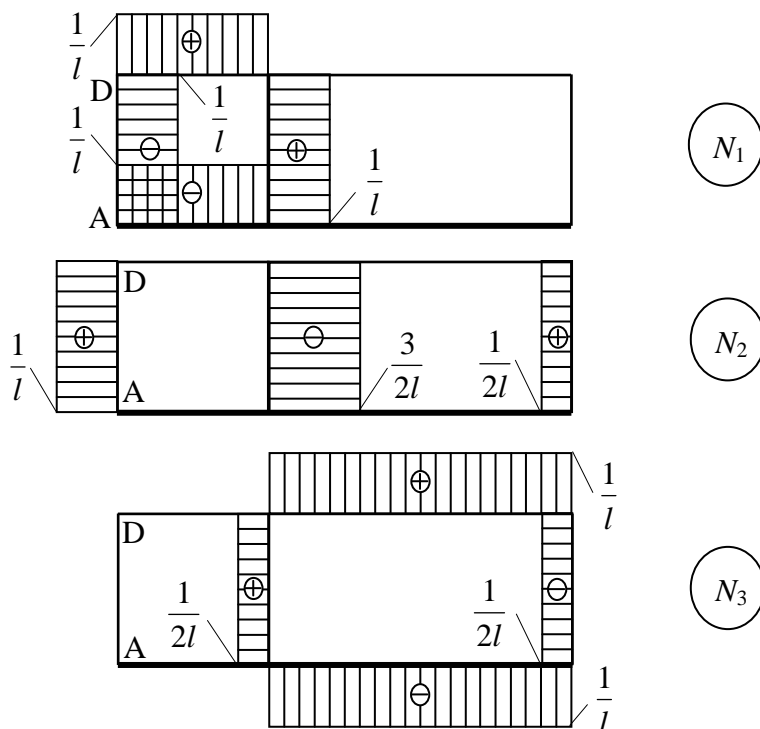
$$\delta_{j0} = \sum_i N_{ij} \cdot \Delta l_i$$

gdzie:

$N_{ij}$  - siła podłużna w  $i$ -tym przęcie wywołana działaniem nadliczbowej  $X_j = 1$

$\Delta l_i$  - błąd montażowy  $i$ -tego przęcia.

Korzystamy z wykresów siły normalnej w stanie  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  i  $X_3 = 1$ . Wyrażenie pod znakiem sumy liczymy tylko dla przęcia AD.



Rys. 20

$$\delta_{10} = -\frac{1}{l} \cdot (-\Delta) = \frac{\Delta}{l}, \quad \delta_{20} = \frac{1}{l} \cdot (-\Delta) = -\frac{\Delta}{l}, \quad \delta_{30} = 0 \cdot (-\Delta) = 0$$

Ujemny znak przy  $\Delta$  wynika z faktu, że pręt AD jest za krótki.

Układ równań metody sił ma postać

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{33}$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21}$ ,  $\delta_{13} = \delta_{31}$ ,  $\delta_{23} = \delta_{32}$  oraz  $\delta_{10}$ ,  $\delta_{20}$ ,  $\delta_{30}$  otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{6} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} \\ -\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{EI} & \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EI} \\ -\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EI} & \frac{5}{3} \cdot \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\Delta}{l} \\ -\frac{\Delta}{l} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Otrzymujemy rozwiązanie układu równań w postaci

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} \\ -\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{EI} & \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EI} \\ -\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EI} & \frac{5}{3} \cdot \frac{l}{EI} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -\left(\frac{\Delta}{l}\right) \\ -\left(-\frac{\Delta}{l}\right) \\ -(0) \end{Bmatrix}$$

Wyznaczamy macierz odwrotną macierzy podatności

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{6} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} \\ -\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{EI} & \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EI} \\ -\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EI} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{EI} & \frac{5}{3} \cdot \frac{l}{EI} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{108}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{28}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{30}{109} \cdot \frac{EI}{l} \\ \frac{28}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{88}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{32}{109} \cdot \frac{EI}{l} \\ \frac{30}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{32}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{81}{109} \cdot \frac{EI}{l} \end{bmatrix}$$

Nadliczbowe mają następujące wartości

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{108}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{28}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{30}{109} \cdot \frac{EI}{l} \\ \frac{28}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{88}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{32}{109} \cdot \frac{EI}{l} \\ \frac{30}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{32}{109} \cdot \frac{EI}{l} & \frac{81}{109} \cdot \frac{EI}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{\Delta}{l} \\ \frac{\Delta}{l} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{80}{109} \cdot \frac{EI\Delta}{l^2} \\ \frac{60}{109} \cdot \frac{EI\Delta}{l^2} \\ \frac{2}{109} \cdot \frac{EI\Delta}{l^2} \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} -0,734 \cdot \frac{EI\Delta}{l^2} \\ 0,550 \cdot \frac{EI\Delta}{l^2} \\ 0,018 \cdot \frac{EI\Delta}{l^2} \end{Bmatrix}$$

Rzędne wykresów sił przekrojowych wyznaczamy korzystając z zasady superpozycji.

$$N = N_1 \cdot X_1 + N_2 \cdot X_2 + N_3 \cdot X_3 + N_0 \quad T = T_1 \cdot X_1 + T_2 \cdot X_2 + T_3 \cdot X_3 + T_0$$

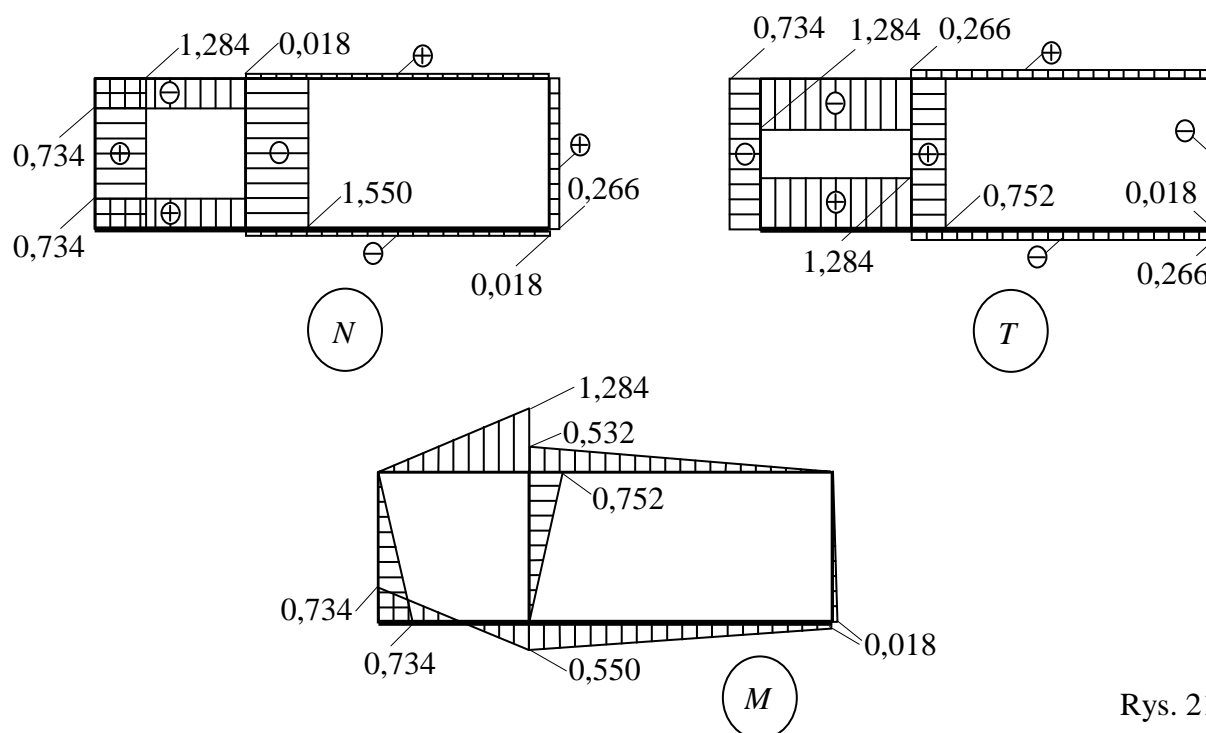
$$M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_3 \cdot X_3 + M_0$$

Uwzględniając, że w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym obciążonym błędem montażowym  $N_0 = T_0 = M_0 = 0$ , dostajemy

$$N = N_1 \cdot X_1 + N_2 \cdot X_2 + N_3 \cdot X_3 \quad T = T_1 \cdot X_1 + T_2 \cdot X_2 + T_3 \cdot X_3$$

$$M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_3 \cdot X_3$$

Wykresy sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym



Rys. 21

Rzędne wykresu siły normalnej i tnącej mnożymy przez  $\frac{EI \cdot \Delta}{l^3}$ , a momentu gnącego przez

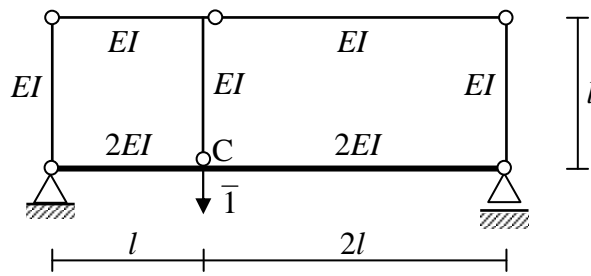
$$\frac{EI \cdot \Delta}{l^2}.$$

Wykresy sił przekrojowych w lewej części rozpatrywanego układu mają rzędne o większych wartościach niż w części prawej. Wynika to z obciążenia układu. Błąd montażowy polega na niezgodności długości pręta AD z długością zaprojektowaną. Pręt AD znajduje się w lewej części układu. Dodajmy jeszcze, że w przypadku pręta za krótkiego będzie on rozciągany, natomiast pręt za długi będzie ściskany.

Po wykonaniu wykresu momentu gnącego dla układu statycznie niewyznaczalnego obciążonego błędem montażowym można przystąpić do wyznaczenia przemieszczenia punktu C. Wykorzystamy pierwsze twierdzenie redukcyjne.

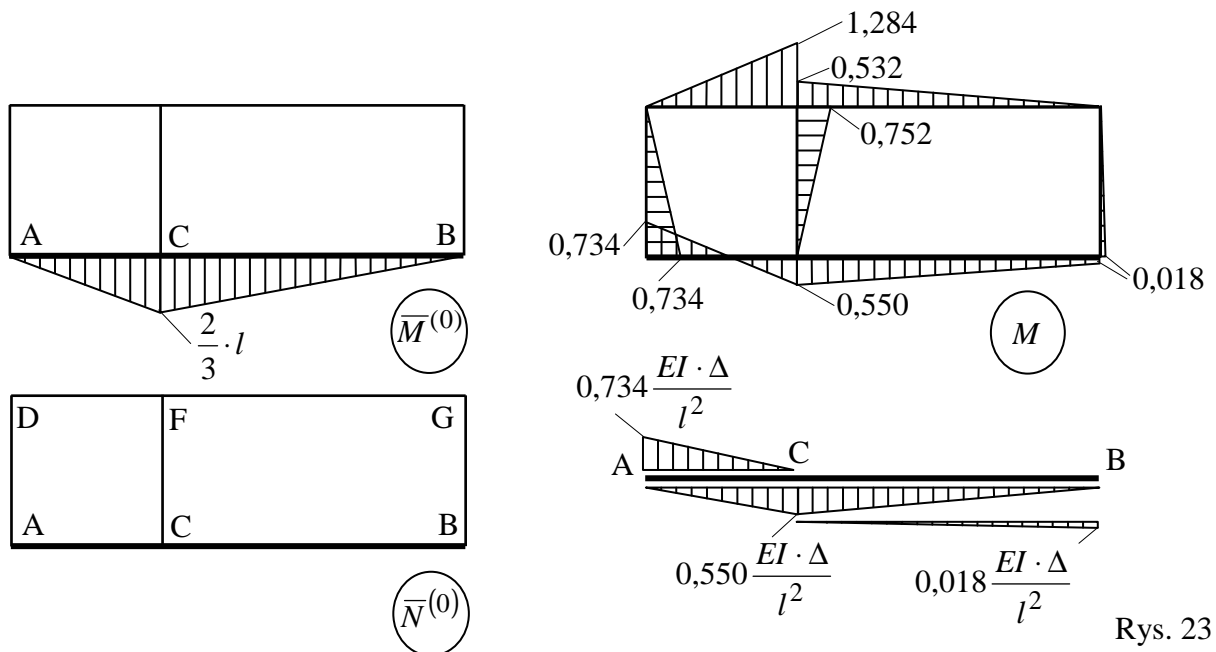
Składowa pozioma przemieszczenia punktu C jest równa zero. W celu wyznaczenia przemieszczenia wskazanego punktu wystarczy wyznaczyć składową pionową. Układ statycznie wyznaczalny obciążamy jednostkową siłą o kierunku pionowym. Nie musi być on identyczny z wcześniej przyjętym układem podstawowym. Obliczenia, podobnie jak

w przypadku układu obciążonego siłami skupionymi, przeprowadzimy przykładając jednostkową siłę wirtualną w dwóch różnych układach statycznie wyznaczalnych.



Rys. 22

Układ, do którego przykładamy jednostkowe obciążenie wirtualne nie musi być identyczny z wcześniej przyjętym układem podstawowym. Górna część powyższego układu nie jest obciążona. Wykres  $\bar{M}^{(0)}$  ma niezerowe rzędne wyłącznie na dolnym ryglu ramy, natomiast na wykresie  $\bar{N}^{(0)}$  wszystkie rzędne są zerowe (w tym na przęcie AD).



Rys. 23

Górna część powyższego układu nie jest obciążona. Wykres  $\bar{M}^{(0)}$  ma niezerowe rzędne wyłącznie na dolnym ryglu ramy.

Wzór dla ram bez skratowania obciążonych błędem montażowym, z którego wyznaczymy przemieszczenie pionowe punktu C jest następujący

$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}^{(0)} M}{E_i I_i} ds + \sum_j \bar{N}_j^{(0)} \cdot \Delta l_j$$

gdzie

$M$ , - siły przekrojowe (momenty gnące) wywołane działaniem obciążenia rzeczywistego w układzie statycznie niewyznaczalnym

$\bar{M}^{(0)}, \bar{N}^{(0)}$  - siły przekrojowe (momenty gnące i siły podłużne) wywołane działaniem obciążenia wirtualnego w postaci jednostkowej siły uogólnionej w układzie statycznie wyznaczalnym

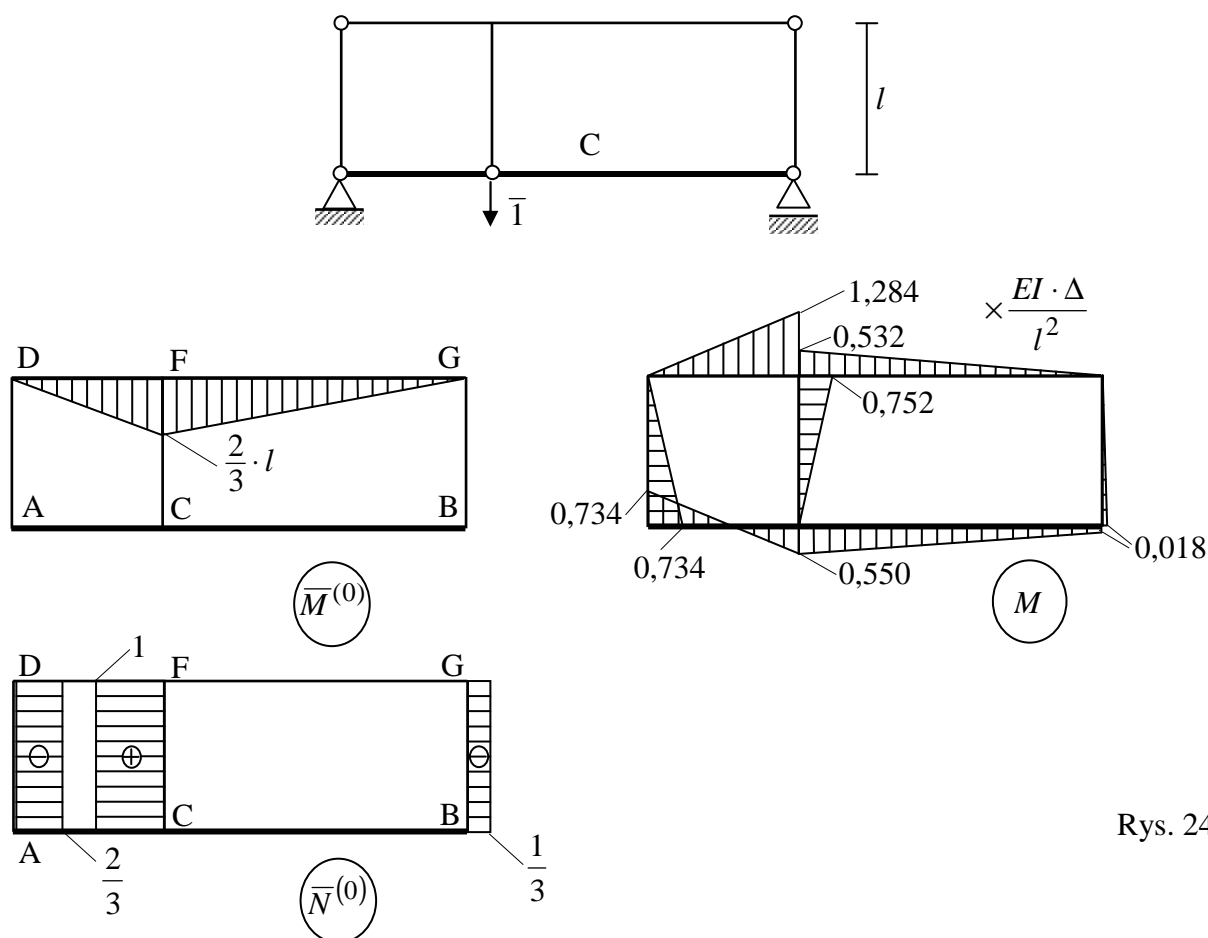
$\Delta l_j$  - błąd montażowy  $j$ -tego pręta.

$$v_C = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}^{(0)} M}{E_i I_i} ds + \sum_j \bar{N}_j^{(0)} \cdot \Delta l_j =$$

$$= \frac{1}{2EI} \left( \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot 0,734 \frac{EI\Delta}{l^2} \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} \cdot 0,550 \frac{EI\Delta}{l^2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} l}_{AC} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \left( \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 0,550 \frac{EI\Delta}{l^2} \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} \cdot 0,018 \frac{EI\Delta}{l^2} \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} l}_{CB} \right) + \underbrace{0 \cdot (-\Delta)}_{AD} \cong 0,145\Delta$$

Jako układ statycznie wyznaczalny, który zostanie obciążony jednostkowym obciążeniem wirtualnym, przyjmijmy teraz układ podstawowy. Sprawdźmy, czy otrzymamy taką samą wartość przemieszczenia punktu C.



Rys. 24



$$\begin{aligned}
v_C &= \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}^{(0)} M}{E_i I_i} ds + \sum_j \overline{N}_j^{(0)} \cdot \Delta l_j = \\
&= \frac{1}{EI} \cdot \left( \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot 1,284 \frac{EI \cdot \Delta}{l^2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} l}_{DF} - \frac{1}{2} \cdot 0,532 \frac{EI \cdot \Delta}{l^2} \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} l \right) + \underbrace{\left( -\frac{2}{3} \right) \cdot (-\Delta)}_{AD} \cong 0,145\Delta
\end{aligned}$$

Wartość wyznaczanego przemieszczenia nie zależy od wyboru układu statycznie wyznaczalnego (utworzonego przez usunięcie nadliczbowych więzów z układu statycznie niewyznaczalnego), który obciążamy wirtualnym obciążeniem jednostkowym.

Należy jeszcze dodać, że rozpatrywany układ jest zewnętrznie statycznie wyznaczalny. W takim przypadku błąd montażowy polegający na osiadaniu podpór lub na niezgodnym z projektem połączeniu układu z podłożem, nie wywołuje powstania sił przekrojowych.