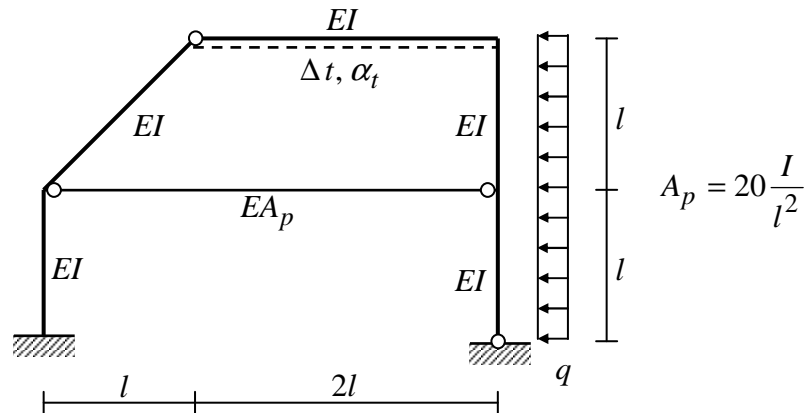


## Przykład 8.2. Rama płaska dwukrotnie statycznie niewyznaczalna

Polecenie: korzystając z metody sił sporządzić wykresy sił przekrojowych dla poniższej ramy.



Rys. 1

Rozwiązanie zadania rozpoczynamy od obliczenia stopnia statycznej niewyznaczalności układu. Dla ramy płaskiej, w której pręty (lub część prętów) tworzą układ zamknięty bądź układy zamknięte, stosujemy wzór

$$n = r + 3 \cdot z - p - 3$$

gdzie:

$r$  - liczba składowych reakcji podpór

$z$  - liczba układów zamkniętych

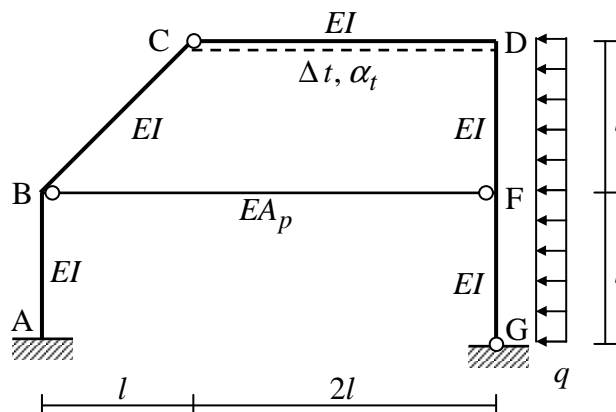
$p$  - liczba połączeń między podukładami (przegubów, teleskopów i tulei).

W rozpatrywanym układzie

$$n = 5 + 3 \cdot 1 - 3 - 3 = 2$$

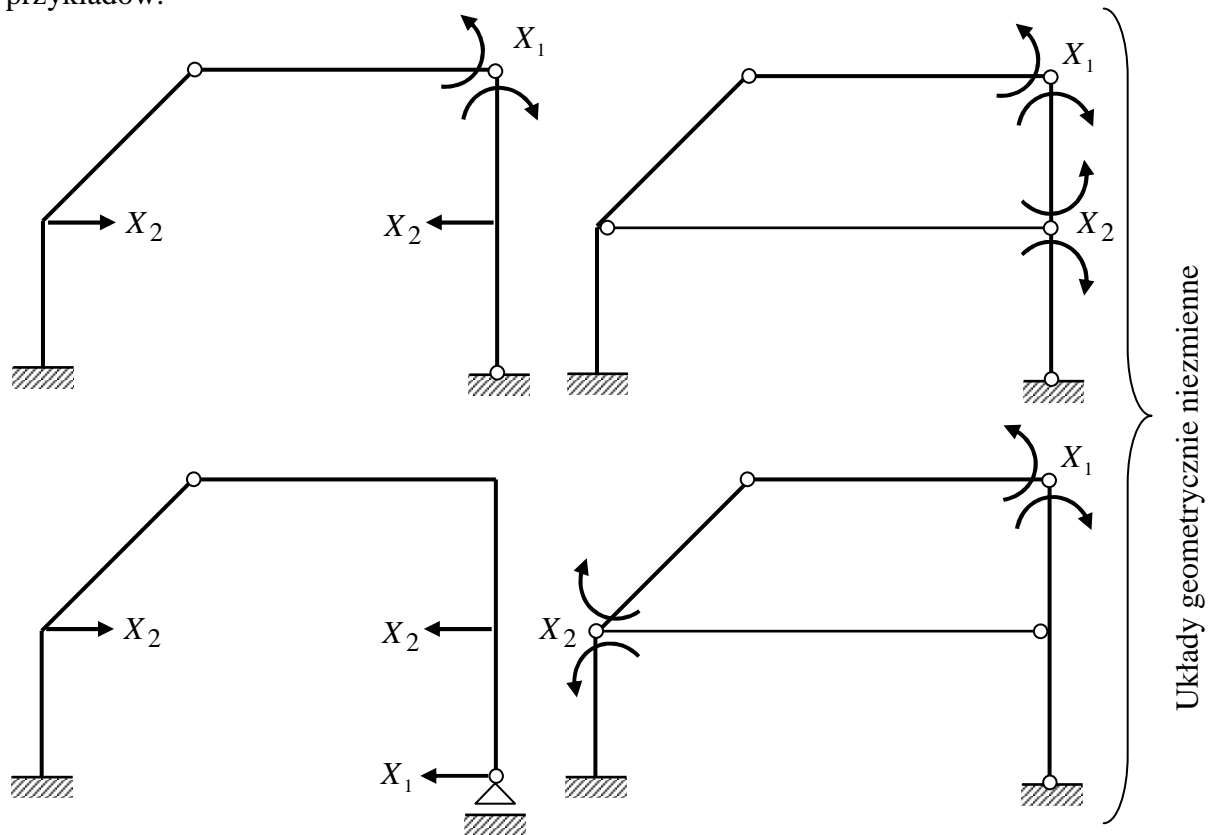
Ze względu na brak relacji między  $q, EI, EA_p, l$  oraz  $\Delta t, \alpha_t$  zadanie należy rozwiązać rozpatrując osobno obciążenie ciągłe  $q$  oraz obciążenie termiczne  $\Delta t$ . W obu przypadkach przyjmujemy ten sam układ podstawowy.

Wprowadzamy oznaczenia podpór, węzłów sztywnych, połączenia przegubowego rygła z prętem o osi ukośnej oraz punktu, w którym na prawym słupie występuje połączenie z prętem dwuprzegubowym.



Rys. 2

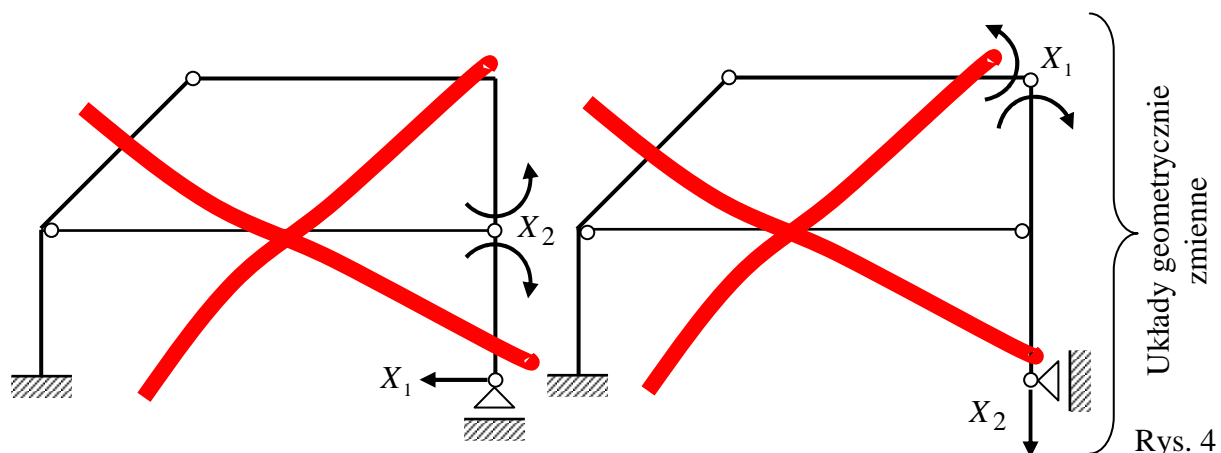
Rozpatrywany układ jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalny. Tworzymy układ podstawowy statycznie wyznaczalny przez usunięcie dwóch nadliczbowych więzów. Musi to być układ geometrycznie niezmienny. Istnieje wiele takich schematów. Poniżej podano kilka przykładów.



Rys. 3

Jako układ podstawowy przyjmijmy pierwszy spośród powyższych, geometrycznie niezmienny układ. Należy pamiętać, że w przyjętym układzie pręt BF jest rozciągany siłą  $X_2$ . Po usunięciu więzów musimy sprawdzić, czy otrzymany układ jest geometrycznie niezmienny. Układ geometrycznie zmienny nie może być układem podstawowym.

Poniżej pokazane są układy geometrycznie zmienne otrzymane po usunięciu dwóch więzów w rozpatrywanej, dwukrotnie statycznie niewyznaczalnej ramie.



Rys. 4

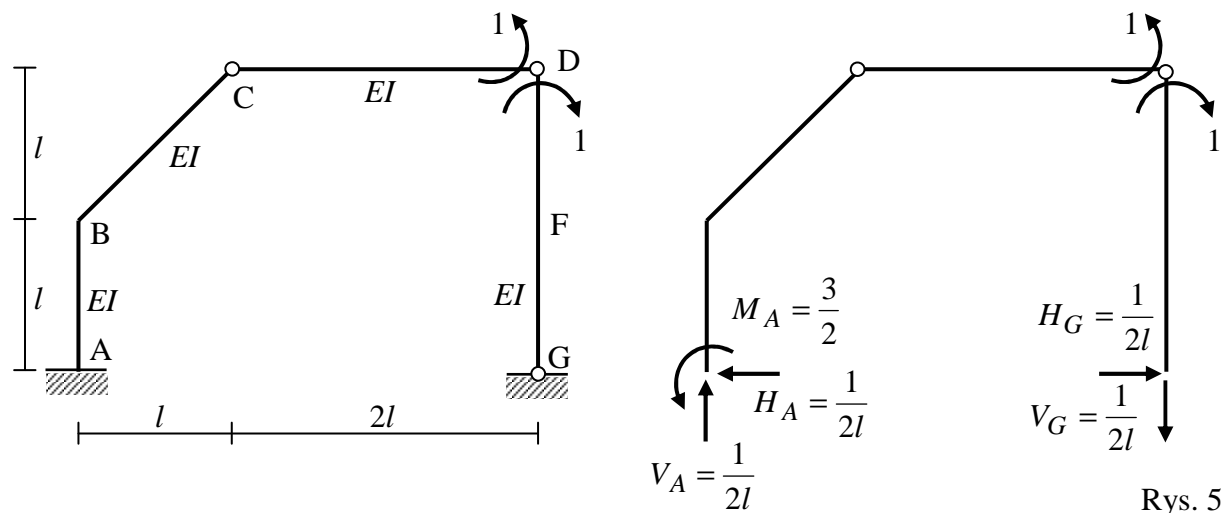
Wykresy sił przekrojowych nie zależą od przyjętego układu podstawowego. Wybór tego układu jest jednak istotny, ponieważ od niego zależy, czy wyznaczenie współczynników

przy niewiadomych (nadliczbowych) oraz wyrazów wolnych w układzie równań metody sił jest mniej lub bardziej pracochłonne.

W pierwszej kolejności zajmiemy się wyznaczeniem wykresów sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym, na który działa obciążenie  $q$ . W tym celu rozpatrujemy kolejne stany:  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  oraz stan zerowy.

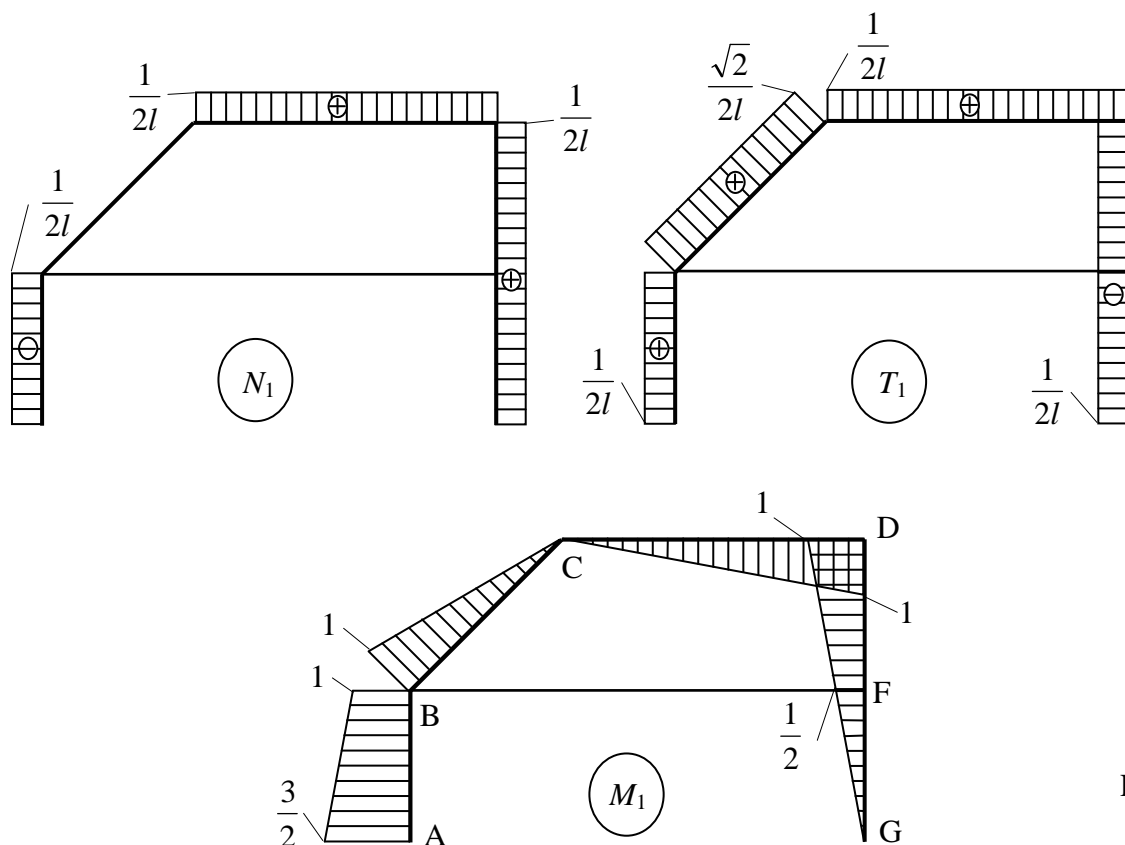
Stan  $X_1 = 1$

W układzie obciążonym przez jednostkowe momenty wyznaczamy reakcje podporowe, a następnie wykonujemy wykresy sił przekrojowych od tego obciążenia. W stanie  $X_1 = 1$  siła w przęcie BF ma wartość zerową.



Rys. 5

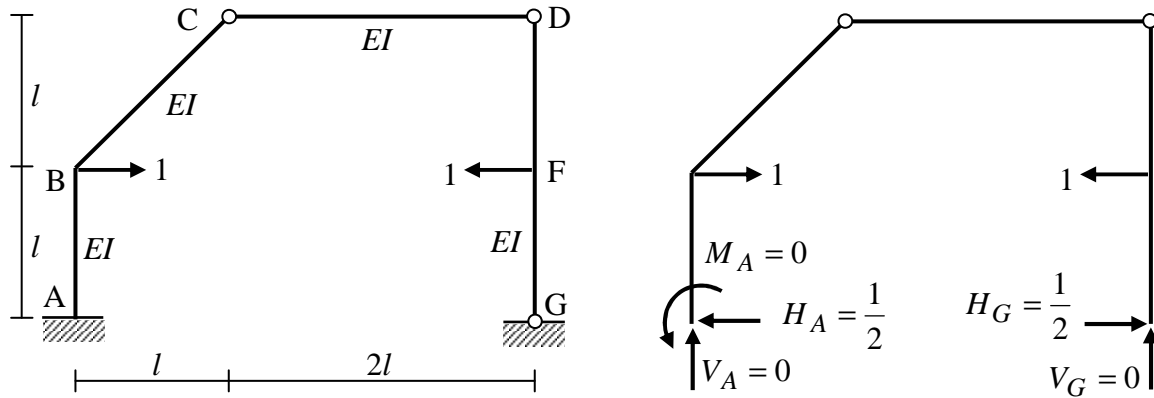
Wykresy sił przekrojowych



Rys. 6

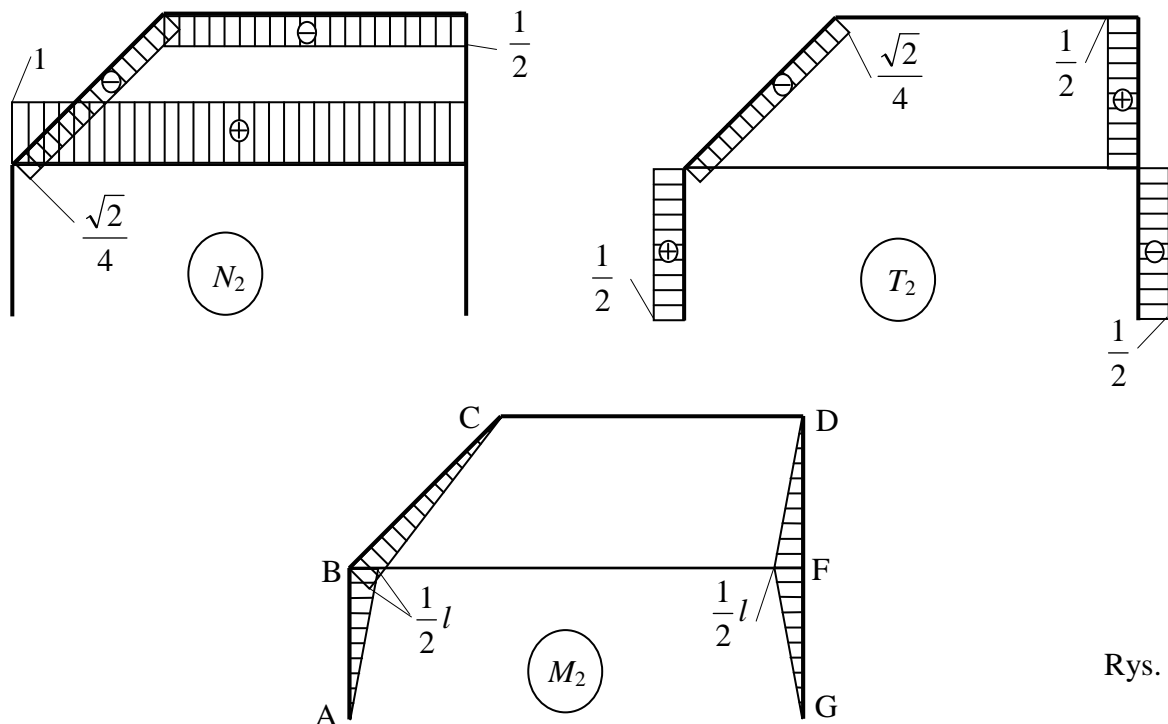
Stan  $X_2 = 1$

W układzie obciążonym przez jednostkowe siły wyznaczamy reakcje podporowe, a następnie wykonujemy wykresy sił przekrojowych od tego obciążenia. W stanie  $X_2 = 1$  siła w przęcie BF ma wartość równą jeden.



Rys. 7

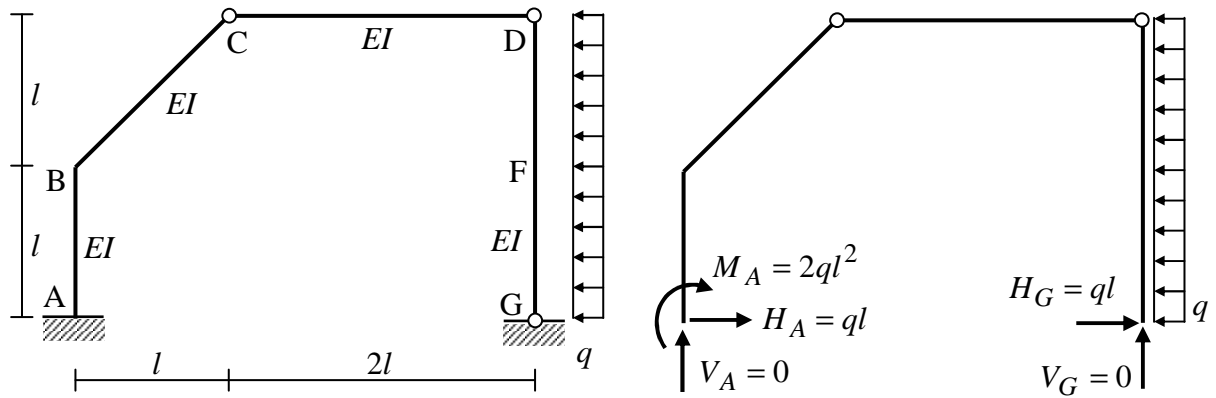
Wykresy sił przekrojowych



Rys. 8

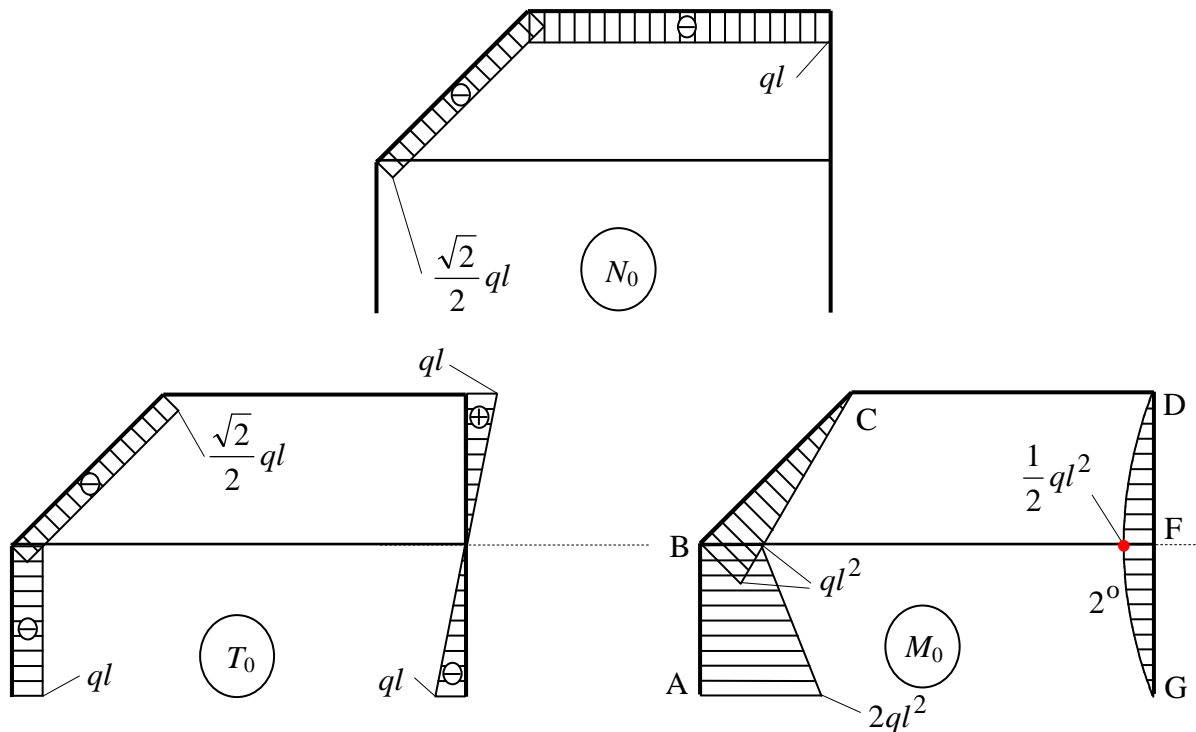
Stan zerowy

Układ podstawowy obciążymy obciążeniem ciągłym  $q$ . Po wyznaczeniu reakcji sporządzimy wykresy sił przekrojowych.



Rys. 9

Wykresy sił przekrojowych



Rys. 10

Wartość całek  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21}$ ,  $\delta_{22}$  oraz  $\delta_{10}$ ,  $\delta_{20}$  wyznaczamy korzystając ze wzoru Wereszczagina. Miejsce występowania ekstremum na wykresie momentu oznaczone jest kolorem czerwonym. W przypadku, gdy figura pod wykresem momentu jest trapezem, podzielimy ją na dwa trójkąty. Nie jest to jedyny możliwy sposób podziału. Można również zastosować podział na prostokąt i trójkąt.

$$\delta_{11} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_1 M_1}{EI} ds + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_1 N_1}{EA_p} ds = \frac{1}{EI} \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)}_{AB} +$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\frac{l}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2}l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)}_{BC} + \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)}_{CD \text{ i } DG} \cdot 2 + \underbrace{\frac{1}{EA_p} \cdot 0 \cdot 3l \cdot 0}_{BF} = \frac{35 + 4 \cdot \sqrt{2}}{12} \cdot \frac{l}{EI} \cong \\
& \cong 3,388 \cdot \frac{l}{EI}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{22} &= \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_2 M_2}{EI} ds + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_2 N_2}{EA_p} ds = \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \right)}_{AB, DF \text{ i } FG} \cdot 3 + \\
& + \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} l \cdot \sqrt{2}l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \right)}_{BC} + \underbrace{\frac{1}{EA_p} \cdot 1 \cdot 3l \cdot 1}_{BF} = \frac{3 + \sqrt{2}}{12} \cdot \frac{l^3}{EI} + 3 \cdot \frac{l}{EA_p}
\end{aligned}$$

Wykorzystamy zadaną zależność między sztywnością ściskania i zginania (Rys. 1).

$$A_p = 20 \frac{I}{l^2} \Rightarrow EA_p = 20 \frac{EI}{l^2}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{22} &= \frac{3 + \sqrt{2}}{12} \cdot \frac{l^3}{EI} + 3 \cdot \frac{l}{EA_p} = \frac{3 + \sqrt{2}}{12} \cdot \frac{l^3}{EI} + 3 \cdot \frac{l}{20 \frac{EI}{l^2}} = \left( \frac{3 + \sqrt{2}}{12} + \frac{3}{20} \right) \cdot \frac{l^3}{EI} = \\
&= \frac{24 + 5\sqrt{2}}{60} \cdot \frac{l^3}{EI} \cong 0,518 \cdot \frac{l^3}{EI}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{12} = \delta_{21} &= \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_1 M_2}{EI} ds + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_1 N_2}{EA_p} ds = \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \left( \frac{1}{3} \left( -\frac{3}{2} \right) + \frac{2}{3} \cdot (-1) \right)}_{AB} + \\
& + \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} l \cdot \sqrt{2}l \cdot \frac{2}{3} \cdot (-1)}_{BC} + \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right)}_{DF} + \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}_{FG} + \\
& + \underbrace{\frac{1}{EA_p} \cdot 1 \cdot 3l \cdot 0 \cdot \frac{1}{l}}_{BF} = \frac{-1 - 4\sqrt{2}}{24} \cdot \frac{l^2}{EI} \cong -0,277 \cdot \frac{l^2}{EI}
\end{aligned}$$

Zauważmy, że wyrazy macierzy podatności zawierają mnożniki, w których „l” występuje w potęgze pierwszej, drugiej lub trzeciej. Ma to związek z przyjętym układem podstawowym, w którym jedna nadliczbowa jest siłą, a druga momentem.

Przystępujemy do wyznaczenia wyrazów wolnych układu równań metody sił.

$$\delta_{10} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_1 M_0}{EI} ds + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_1 N_0}{EA_p} ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2ql^2 \cdot l \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot l \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) \right)}_{AB} + \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot \sqrt{2}l \cdot \frac{2}{3} \cdot (-1)}_{BC} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{2}}_{DG} + \underbrace{\frac{1}{EA_p} \cdot 0 \cdot 3l \cdot 0}_{BF} = -\frac{19+4\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{ql^3}{EI} \cong -2,055 \cdot \frac{ql^3}{EI} \\
\delta_{20} &= \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_2 M_0}{EI} ds + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_2 N_0}{EA_p} ds = \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 2ql^2 + \frac{2}{3} \cdot ql^2 \right)}_{AB} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sqrt{2}l \cdot \frac{2}{3} \cdot ql^2}_{BC} + \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot l \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} l \right) \cdot 2}_{DF \text{ i } FG} + \underbrace{\frac{1}{EA_p} \cdot 1 \cdot 3l \cdot 0}_{BF} = \frac{13+4\sqrt{2}}{24} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cong \\
&\cong 0,777 \cdot \frac{ql^4}{EI}
\end{aligned}$$

Układ równań metody sił ma postać

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21}$ ,  $\delta_{22}$  oraz  $\delta_{10}$ ,  $\delta_{20}$  otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 3,388 \frac{l}{EI} & -0,277 \frac{l^2}{EI} \\ -0,277 \frac{l^2}{EI} & 0,518 \frac{l^3}{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2,055 \frac{ql^3}{EI} \\ 0,777 \frac{ql^4}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Otrzymujemy rozwiązanie układu równań w postaci

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,388 \frac{l}{EI} & -0,277 \frac{l^2}{EI} \\ -0,277 \frac{l^2}{EI} & 0,518 \frac{l^3}{EI} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -\left( -2,055 \frac{ql^3}{EI} \right) \\ -\left( 0,777 \frac{ql^4}{EI} \right) \end{Bmatrix}$$

Wyznaczamy macierz odwrotną

$$\begin{bmatrix} 3,388 \frac{l}{EI} & -0,277 \frac{l^2}{EI} \\ -0,277 \frac{l^2}{EI} & 0,518 \frac{l^3}{EI} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,309 \frac{EI}{l} & 0,165 \frac{EI}{l^2} \\ 0,165 \frac{EI}{l^2} & 2,019 \frac{EI}{l^3} \end{bmatrix}$$

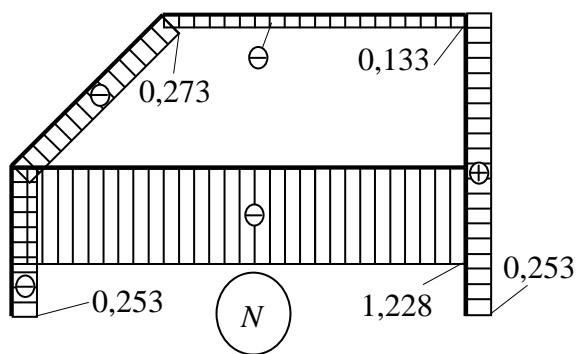
Nadliczbowe mają następujące wartości

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,309 \frac{EI}{l} & 0,165 \frac{EI}{l^2} \\ 0,165 \frac{EI}{l^2} & 2,019 \frac{EI}{l^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2,055 \frac{ql^3}{EI} \\ -0,777 \frac{ql^4}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,507 ql^2 \\ -1,230 ql \end{Bmatrix}$$

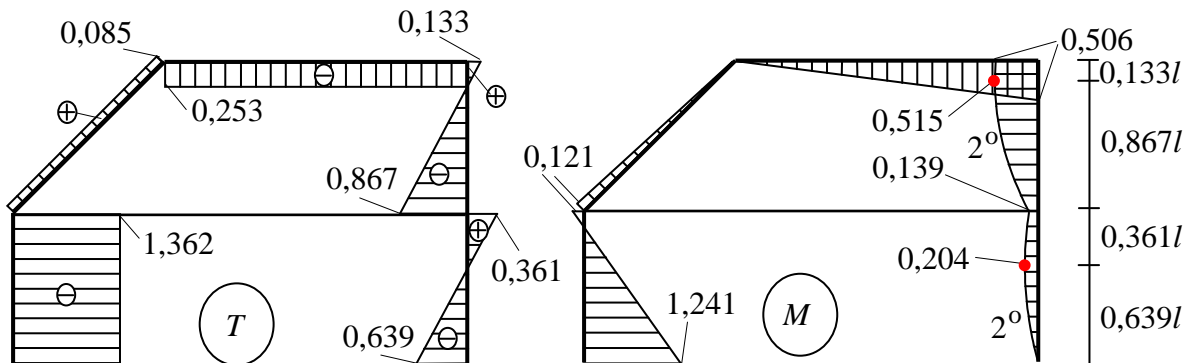
Rzędne wykresów sił przekrojowych wyznaczamy korzystając z zasady superpozycji.

$$N = N_1 \cdot X_1 + N_2 \cdot X_2 + N_0 \quad T = T_1 \cdot X_1 + T_2 \cdot X_2 + T_0 \quad M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_0$$

Wykresy sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym

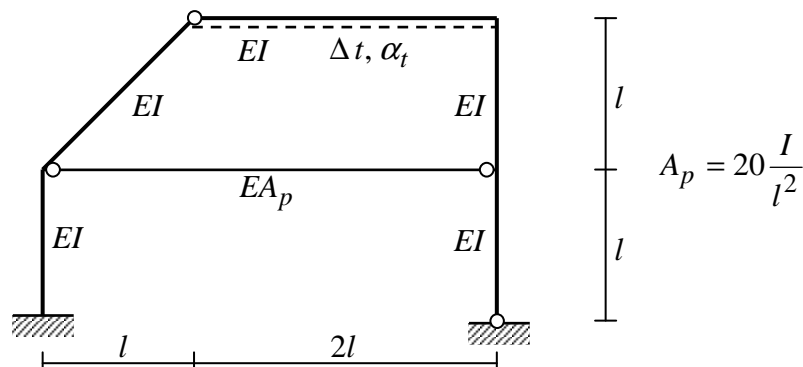


Rzędne wykresu siły normalnej i tnącej mnożymy przez  $ql$ , natomiast rzędne wykresu momentu gnącego przez  $ql^2$ . Miejsce występowania ekstremum na wykresie momentu oznaczone jest kolorem czerwonym. Położenie przekroju, w którym zeruje się siła tnąca, a moment gnący osiąga wartość ekstremalną, podane jest na linii wymiarowej.



Rys. 11

W rozwiązywanym zadaniu poza obciążeniem ciągłym występuje również obciążenie termiczne. W układzie statycznie niewyznaczalnym tego typu obciążenie powoduje powstanie sił przekrojowych.



Rys. 12



Przyjmujemy ten sam układ podstawowy. Możemy wykorzystać wcześniejsze rozwiązanie dla stanu  $X_1 = 1$  i  $X_2 = 1$  oraz wyznaczoną macierz podatności.

W stanie zerowym układ podstawowy, będący układem statycznie wyznaczalnym, poddany jest działaniu obciążenia termicznego. W takim przypadku rzędne na wykresach  $N_0$ ,  $T_0$ ,  $M_0$  są zerowe. W przypadku, gdy na rozpatrywaną ramę działa obciążenie termiczne (o jednorodnym rozkładzie temperatury w przekroju poprzecznym pręta), wyrazy wolne układu równań metody sił wyznaczamy zgodnie z poniższym wzorem.

$$\delta_{j0} = \sum_i \int_0^{l_i} N_{ij} \cdot \alpha_{ti} \cdot \Delta t_i \cdot ds$$

gdzie:

$\alpha_{ti}$  ...- współczynnik rozszerzalności termicznej  $i$ -tego pręta

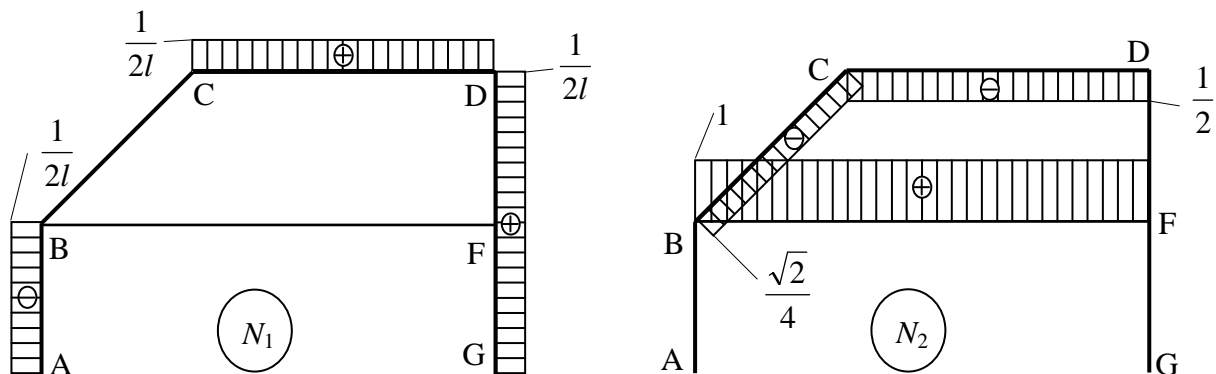
$\Delta t_i$  - przyrost temperatury  $i$ -tego pręta (różnica temperatury użytkowania i temperatury montażu konstrukcji)

$N_{ij}$  - siła podłużna w  $i$ -tym pręcie wywołana działaniem nadliczbowej  $X_j = 1$

Siły normalne w każdym przedziale w stanie  $X_1 = 1$  i  $X_2 = 1$  mają stałą wartość ( $N_{ij} = \text{const}$ ). Przyjmujemy, że każdy pręt na całej swej długości wykonany jest z jednego materiału o stałej wartości współczynnika rozszerzalności termicznej. W rozpatrywanym przykładzie obciążenie termiczne przyłożone jest na całej długości wskazanego pręta. Uwzględniając to otrzymujemy

$$\delta_{j0} = \sum_i \int_0^{l_i} N_{ij} \cdot \alpha_{ti} \cdot \Delta t_i \cdot ds = \sum_i N_{ij} \cdot \alpha_{ti} \cdot \Delta t_i \int_0^{l_i} ds = \sum_i N_{ij} \cdot \alpha_{ti} \cdot \Delta t_i \cdot s \Big|_0^{l_i} = \sum_i N_{ij} \cdot \alpha_{ti} \cdot \Delta t_i \cdot l_i$$

Wprowadzamy oznaczenia podpór, węzłów sztywnych, połączenia przegubowego rygła z prętem o osi ukośnej oraz punktu, w którym na prawym słupie występuje połączenie z prętem dwuprzegubowym. Korzystamy z wykresów siły normalnej w stanie  $X_1 = 1$  i  $X_2 = 1$ . Wyrażenie pod znakiem sumy liczymy tylko dla pręta CD.



Rys. 13

$$\delta_{10} = \frac{1}{2l} \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot 2l = \alpha_t \cdot \Delta t$$

$$\delta_{20} = -\frac{1}{2} \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot 2l = -\alpha_t \cdot \Delta t \cdot l$$

Układ równań metody sił ma postać

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości  $\delta_{11}, \delta_{12} = \delta_{21}, \delta_{22}$  oraz  $\delta_{10}, \delta_{20}$  otrzymujemy poniższy układ równań metody sił.

$$\begin{bmatrix} 3,388 \frac{l}{EI} & -0,277 \frac{l^2}{EI} \\ -0,277 \frac{l^2}{EI} & 0,518 \frac{l^3}{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_t \cdot \Delta t \\ -\alpha_t \cdot \Delta t \cdot l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Rozwiązanie tego układu równań ma postać

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,388 \frac{l}{EI} & -0,277 \frac{l^2}{EI} \\ -0,277 \frac{l^2}{EI} & 0,518 \frac{l^3}{EI} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -(\alpha_t \cdot \Delta t) \\ -(-\alpha_t \cdot \Delta t \cdot l) \end{Bmatrix}$$

Wyznaczamy macierz odwrotną

$$\begin{bmatrix} 3,388 \frac{l}{EI} & -0,277 \frac{l^2}{EI} \\ -0,277 \frac{l^2}{EI} & 0,518 \frac{l^3}{EI} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,309 \frac{EI}{l} & 0,165 \frac{EI}{l^2} \\ 0,165 \frac{EI}{l^2} & 2,019 \frac{EI}{l^3} \end{bmatrix}$$

Nadliczbowe mają następujące wartości

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,309 \frac{EI}{l} & 0,165 \frac{EI}{l^2} \\ 0,165 \frac{EI}{l^2} & 2,019 \frac{EI}{l^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\alpha_t \cdot \Delta t \\ \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,143 \frac{\alpha_t \Delta t EI}{l} \\ 1,853 \frac{\alpha_t \Delta t EI}{l^2} \end{Bmatrix}$$

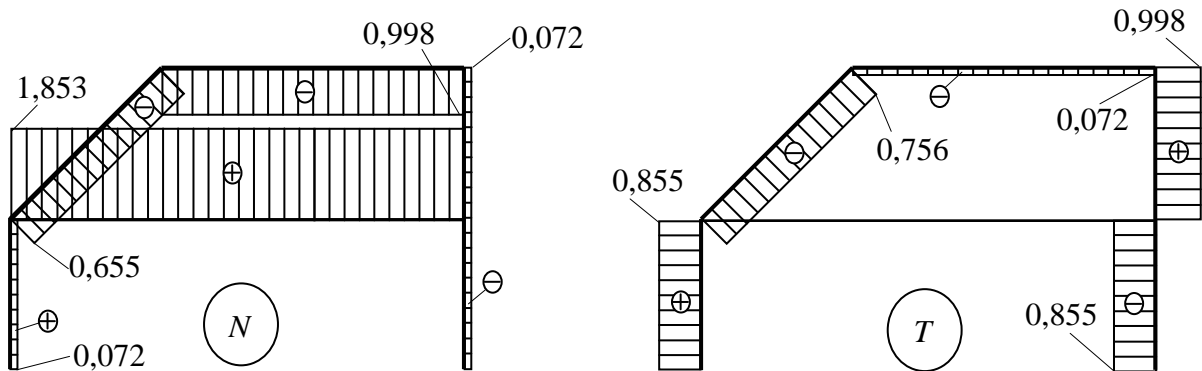
Rzędne wykresów sił przekrojowych wyznaczamy korzystając z zasady superpozycji.

$$N = N_1 \cdot X_1 + N_2 \cdot X_2 + N_0 \quad T = T_1 \cdot X_1 + T_2 \cdot X_2 + T_0 \quad M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_0$$

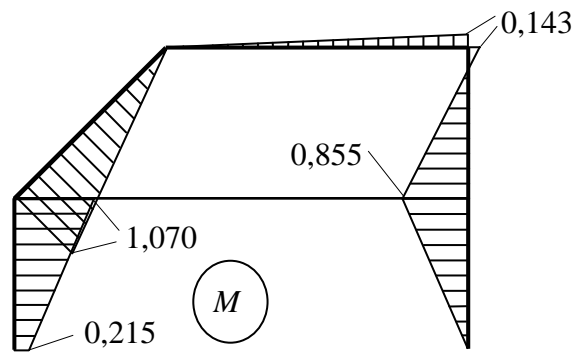
Uwzględniając, że w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym obciążonym obciążeniem termicznym  $N_0 = T_0 = M_0 = 0$ , dostajemy

$$N = N_1 \cdot X_1 + N_2 \cdot X_2 \quad T = T_1 \cdot X_1 + T_2 \cdot X_2 \quad M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$$

Wykresy sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym



Rzędne wykresu siły normalnej i tnącej mnożymy przez  $\frac{EI \cdot \alpha_t \cdot \Delta t}{l^2}$ .



Rys. 14

Rzędne wykresu momentu gnącego mnożymy przez  $\frac{EI \cdot \alpha_t \cdot \Delta t}{l}$ .