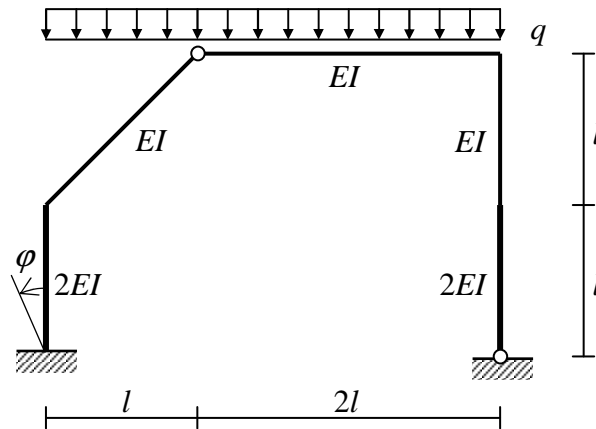


Przykład 8.1. Rama płaska jednokrotnie statycznie niewyznaczalna

Polecenie: korzystając z metody sił sporządzić wykresy sił przekrojowych dla poniższej ramy.



Rys. 1

Rozwiązanie zadania rozpoczynamy od obliczenia stopnia statycznej niewyznaczalności układu. W przypadku ramy płaskiej bez układów zamkniętych korzystamy ze wzoru

$$n = r - p - 3$$

gdzie:

r - liczba składowych reakcji podpór

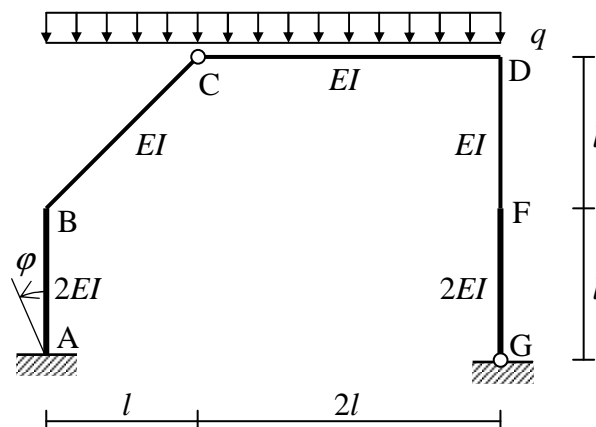
p - liczba połączeń między podukładami (przegubów, teleskopów i tulei).

W rozpatrywanym układzie

$$n = 5 - 1 - 3 = 1$$

Ze względu na brak relacji między q , EI , l oraz φ należy zadanie rozwiązać rozpatrując osobno obciążenie ciągłe q oraz błąd montażowy φ . W obu przypadkach przyjmujemy ten sam układ podstawowy.

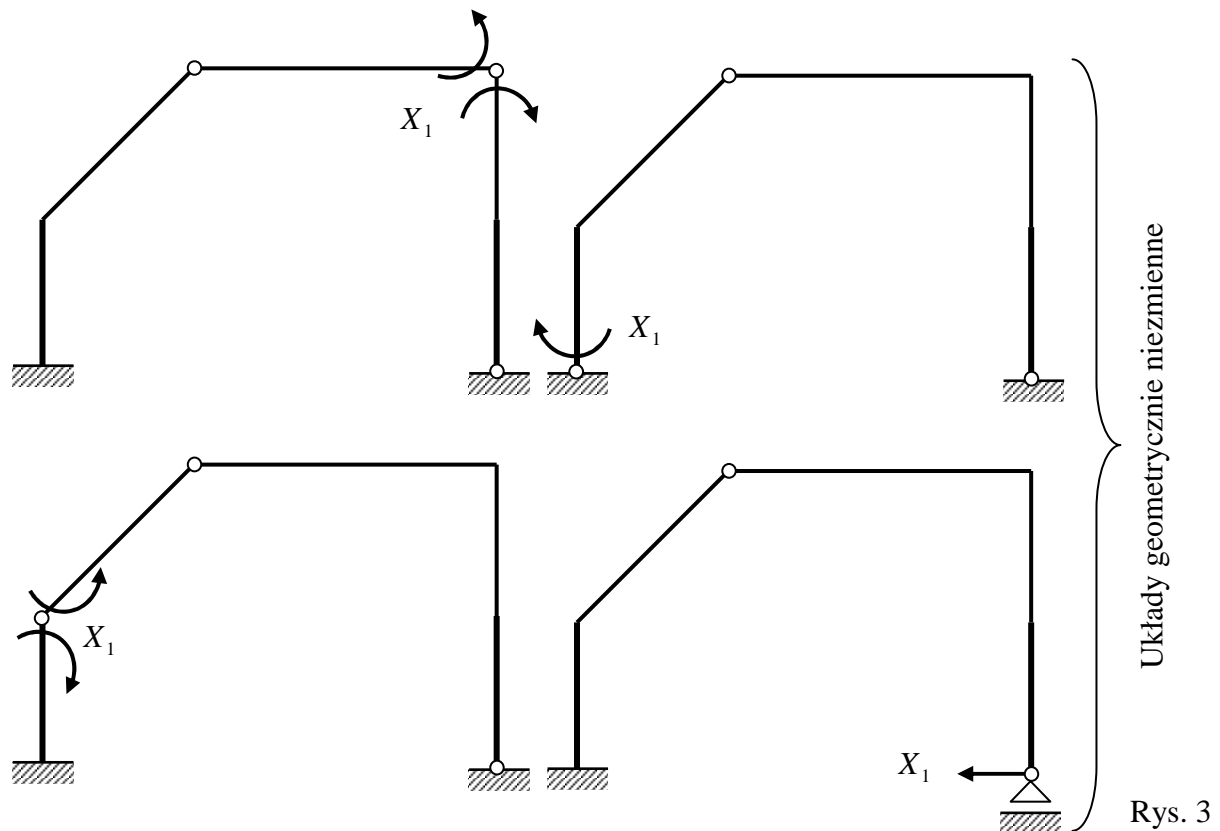
Wprowadzamy oznaczenia podpór, węzłów sztywnych, połączenia przegubowego rygła z prętem o osi ukośnej oraz punktu, w którym na prawym słupie występuje zmiana sztywności zginania.



Rys. 2

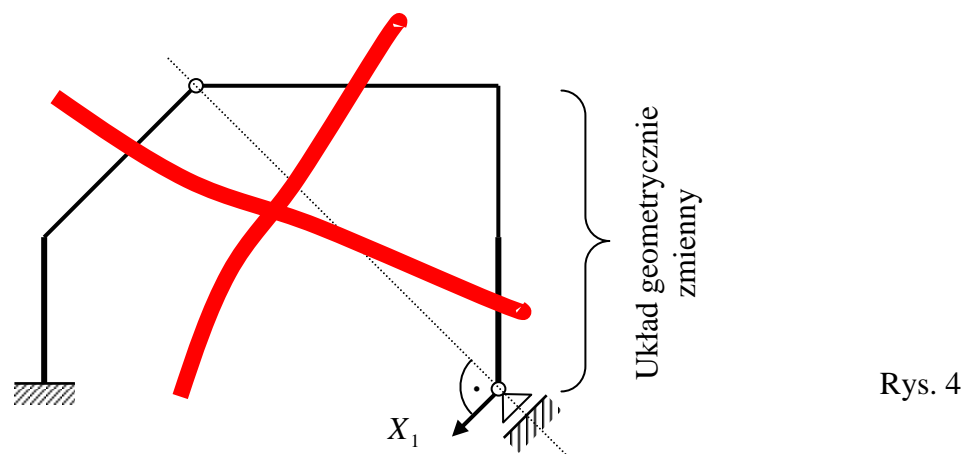
Rozpatrywany układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny. Tworzymy układ podstawowy statycznie wyznaczalny przez usunięcie jednego nadliczbowego więzu. Musi to

być układ geometrycznie niezmienny. Istnieje wiele takich schematów. Poniżej podano kilka przykładów.



Jako układ podstawowy przyjmiemy pierwszy spośród powyższych, geometrycznie niezmiennych układów. Po usunięciu więzów należy sprawdzić, czy otrzymany układ jest geometrycznie niezmienny. Układem podstawowym nie może być układ geometrycznie zmienny.

Poniżej pokazany jest układ geometrycznie zmienny otrzymany po usunięciu jednego więzu w rozpatrywanej, jednokrotnie statycznie niewyznaczalnej ramie.

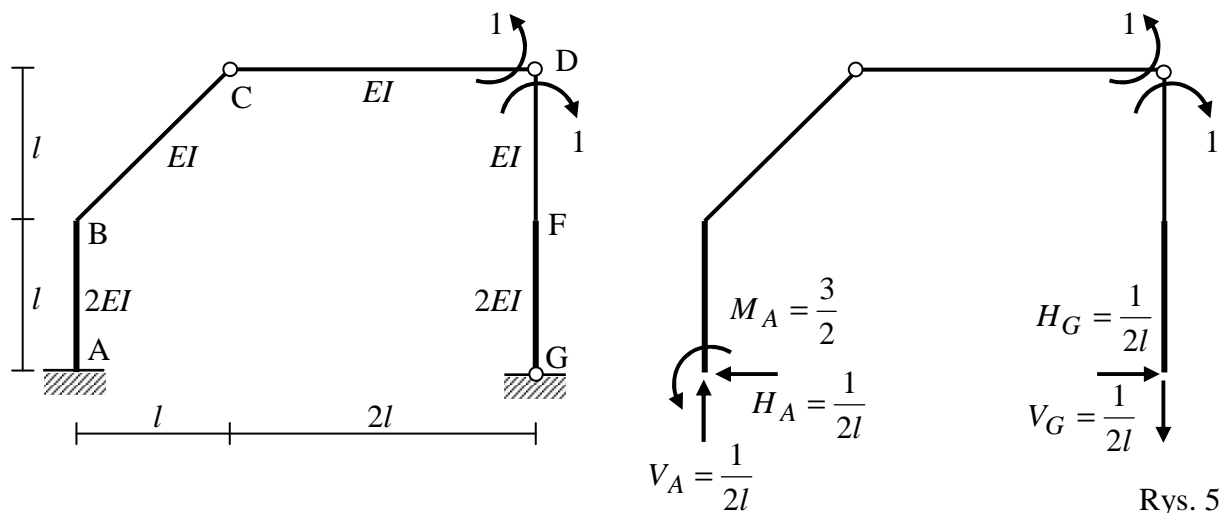


Wykresy sił przekrojowych nie zależą od przyjętego układu podstawowego. Wybór tego układu jest jednak istotny, ponieważ od niego zależy, czy wyznaczenie współczynników przy niewiadomych (nadliczbowych) oraz wyrazów wolnych w układzie równań metody sił jest mniej lub bardziej pracochłonne.

W pierwszej kolejności zajmiemy się wyznaczeniem wykresów sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym, na który działa obciążenie q . W tym celu rozpatrujemy kolejne stany: $X_1 = 1$ oraz stan zerowy.

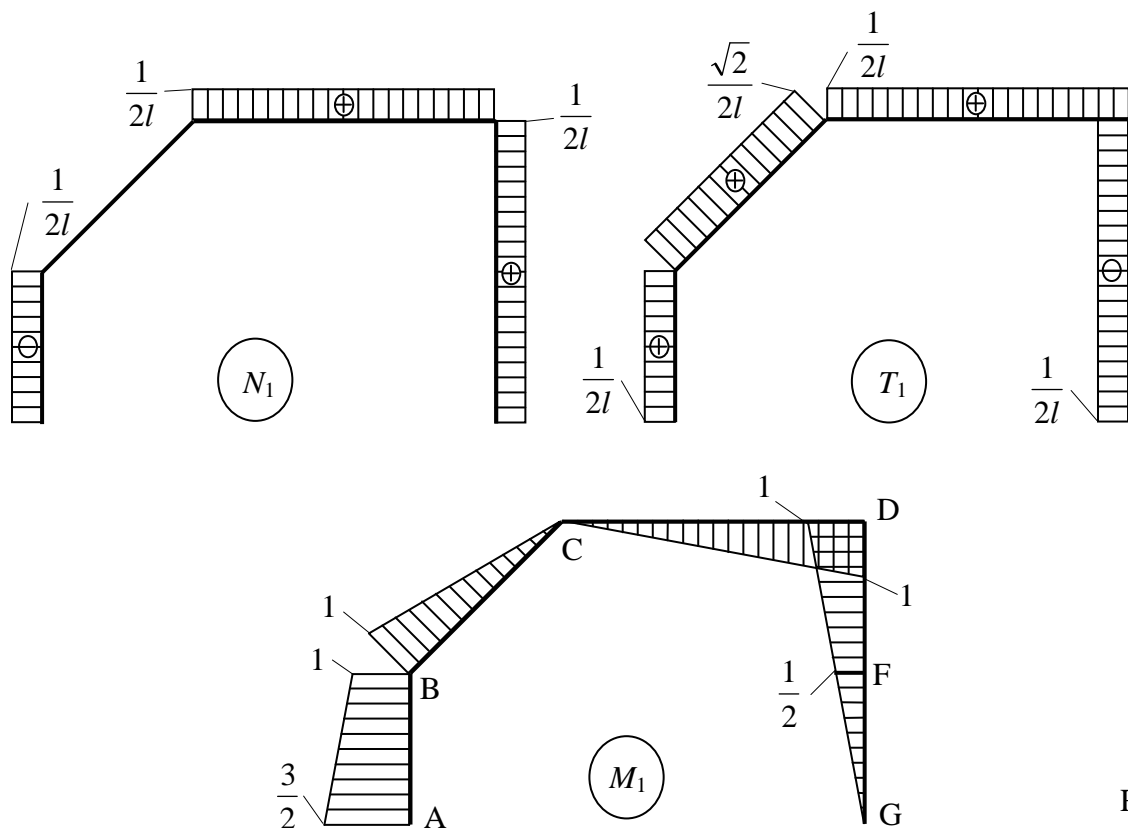
Stan $X_1 = 1$

W układzie obciążonym przez jednostkowe momenty wyznaczamy reakcje podporowe, a następnie wykonujemy wykresy sił przekrojowych od tego obciążenia.



Rys. 5

Wykresy sił przekrojowych

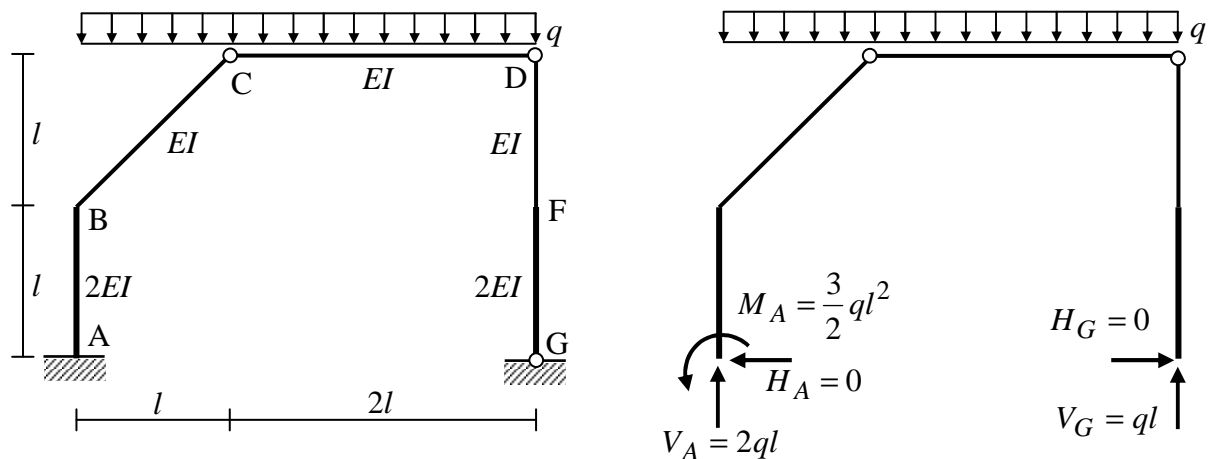


Rys. 6

Przy wyznaczaniu całki dla prawego słupka należy pamiętać o różnych sztywnościach zginania w przedziale DF i FG. Wynika stąd konieczność wyznaczenia rzędnej na wykresie momentów w przekroju w punkcie F.

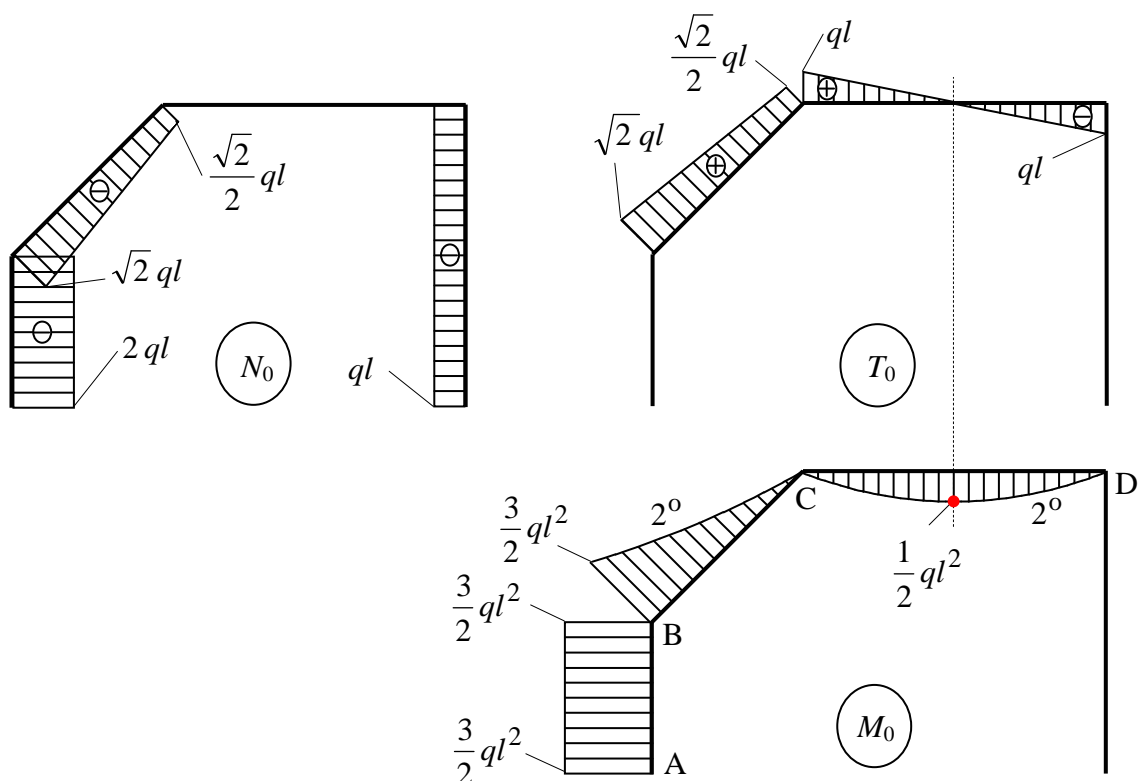
Stan zerowy

Układ podstawowy obciążymy obciążeniem ciągłym q . Po wyznaczeniu reakcji sporządzimy wykresy sił przekrojowych.



Rys. 7

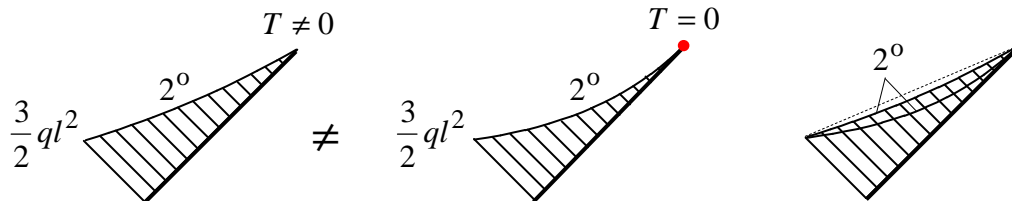
Wykresy sił przekrojowych



Rys. 8

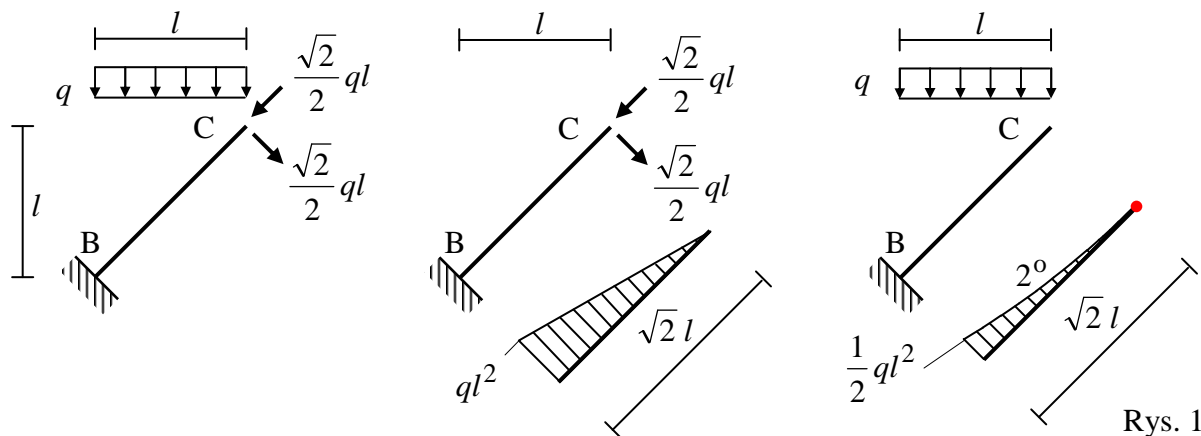
Wartość całek δ_{11} oraz δ_{10} wyznaczmy korzystając ze wzoru Wereszczagina. Zauważmy, że w przedziale BC, w którym działa obciążenie ciągłe, siła tnąca nie zeruje się w żadnym

przekroju. Oznacza to brak momentu ekstremalnego w tym przedziale. Nie dysponujemy gotowymi wzorami, z których bylibyśmy w stanie wyznaczyć pole figury pod wykresem wskazanej paraboli oraz określić współrzędną środka ciężkości tej figury. Zastosowanie wzorów wyprowadzonych dla figury środkowej z rys. 9 do figury znajdującej się po jej lewej stronie prowadzi do błędnych wyników, gdyż są to różne figury. Widać to wyraźnie po nałożeniu na siebie obu wykresów parabolicznych.



Rys. 9

W takim przypadku możemy przedstawić wykres momentu z przedziału BC jako sumę dwóch wykresów składowych. W węźle B myślowo wprowadzamy utwierdzenie. W punkcie C przykładamy siłę normalną i tnącą. Wykres liniowy pochodzi od siły tnącej, natomiast wykres paraboliczny od obciążenia ciągłego q (w punkcie C parabola ma ekstremum). Suma wykresów z rysunku 10 jest identyczna z wykresem po lewej stronie na rysunku 9.



Rys. 10

Miejsce występowania ekstremum na wykresie momentów oznaczone jest kolorem czerwonym. W przypadku, gdy figura pod wykresem momentów jest trapezem, podzielimy ją na dwa trójkąty. Nie jest to jedyny możliwy sposób podziału. Można również zastosować podział na prostokąt i trójkąt.

$$\begin{aligned}
 \delta_{11} &= \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{1}{2EI} \cdot \left(\underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right)}_{AB} \right) + \\
 &+ \frac{l}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \\
 &+ \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \\
 &= \frac{25 + 4 \cdot \sqrt{2}}{12} \cdot \frac{l}{EI} \cong 2,555 \cdot \frac{l}{EI}
 \end{aligned}$$

$$\delta_{10} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_1 M_0}{EI} ds = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{2} + 1\right)}_{AB} \cdot l \cdot \frac{3}{2} ql^2 +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot \sqrt{2} l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ql^2 \cdot \sqrt{2} l \cdot \frac{3}{4} \cdot 1\right)}_{BC} + \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}_{CD} =$$

$$= \frac{61 + 22\sqrt{2}}{48} \cdot \frac{ql^3}{EI} \cong 1,919 \cdot \frac{ql^3}{EI}$$

Równanie metody sił ma postać

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0$$

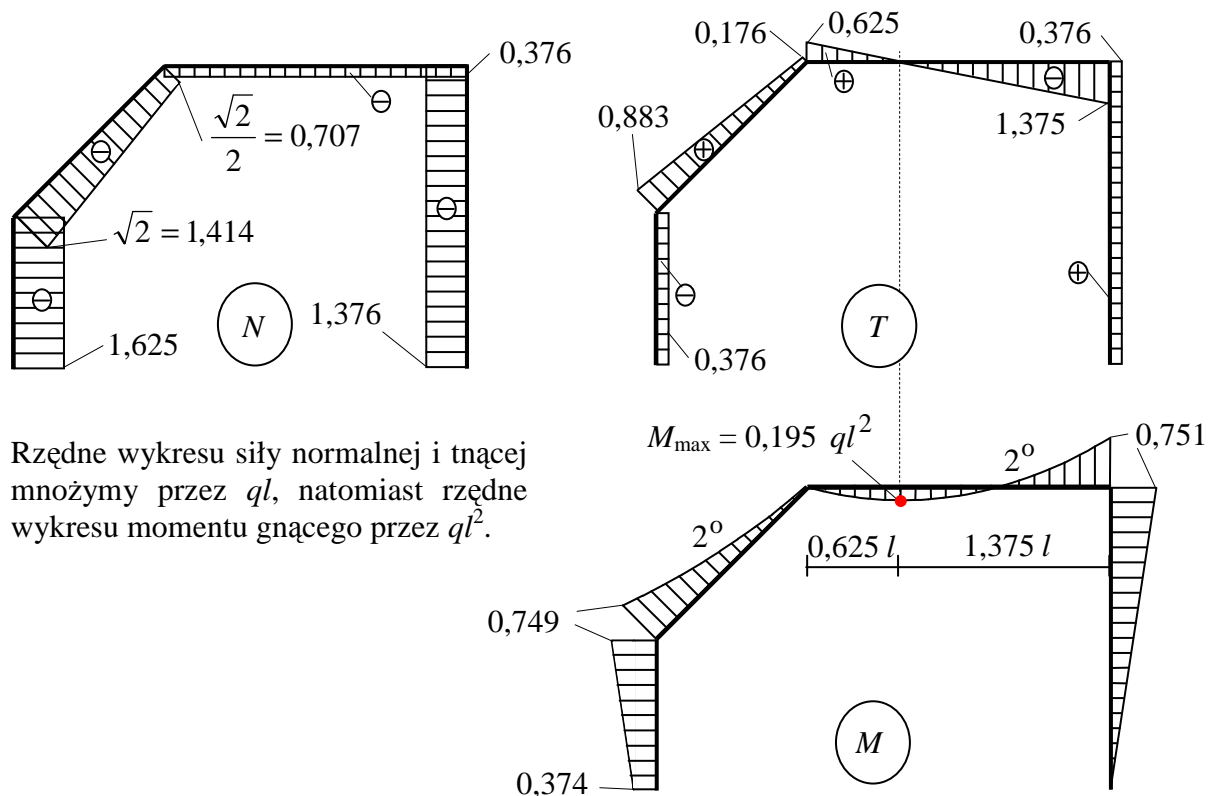
Po podstawieniu wyznaczonych wartości δ_{11} oraz δ_{10} i rozwiązaniu równania otrzymujemy

$$2,555 \cdot \frac{l}{EI} \cdot X_1 + 1,919 \cdot \frac{ql^3}{EI} = 0 \Rightarrow X_1 \cong -0,751 ql^2$$

Rzędne wykresów sił przekrojowych wyznaczamy korzystając z zasady superpozycji.

$$N = N_1 \cdot X_1 + N_0 \quad T = T_1 \cdot X_1 + T_0 \quad M = M_1 \cdot X_1 + M_0$$

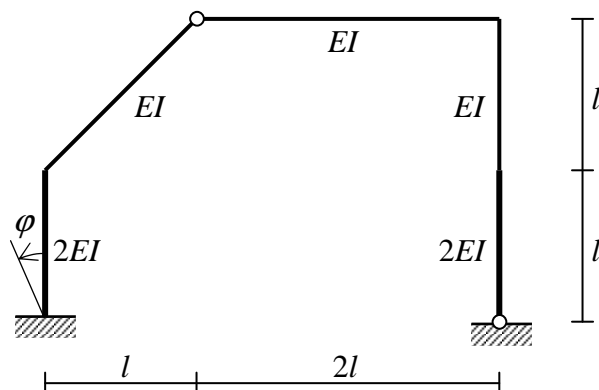
Wykresy sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym



Rzędne wykresu siły normalnej i tnącej mnożymy przez ql , natomiast rzędne wykresu momentu gnącego przez ql^2 .

Rys. 11

W rozwiązywanym zadaniu poza obciążeniem ciągłym występuje również błąd montażowy. W układzie statycznie niewyznaczalnym tego typu obciążenie powoduje powstanie sił przekrojowych.



Rys. 12

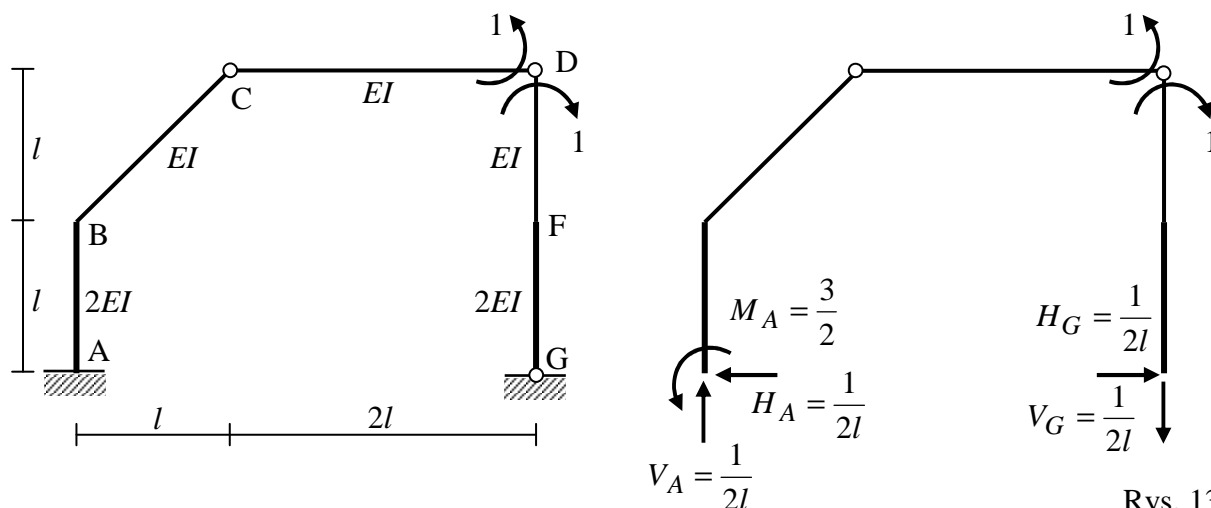
Przyjmujemy ten sam układ podstawowy. Możemy wykorzystać wcześniejsze rozwiązanie dla stanu $X_1 = 1$ oraz wyznaczoną wartość δ_{11} .

W stanie zerowym układ podstawowy, będący układem statycznie wyznaczalnym, obciążymy błędem montażowym. W takim przypadku rzędne na wykresach N_0 , T_0 , M_0 są zerowe.

Wyraz wolny δ_{10} w równaniu metody sił obliczymy korzystając ze wzoru:

$$\delta_{10} = -\sum_m R_{m1} \cdot \Delta_m$$

gdzie R_{m1} oznacza reakcję m -tej podpory w stanie $X_1 = 1$.



Rys. 13

Oś lewego słupka w miejscu zamocowania sztywnego punkcie A obrócona jest o kąt φ od kierunku pionowego, zgodnego z projektem. Reakcją podpory A w stanie $X_1 = 1$ jest moment podporowy M_A .

$$\delta_{10} = -M_A \cdot \varphi = -\frac{3}{2} \cdot \varphi$$

Iloczyn $M_A \cdot \varphi$ jest dodatni ze względu na jednakowe zwroty momentu M_A i kąta φ . Ujemna wartość δ_{10} wynika ze wzoru (znak minus przed znakiem sumy).

Równanie metody sił ma postać

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości δ_{11} oraz δ_{10} i rozwiązaniu równania otrzymujemy

$$2,555 \cdot \frac{l}{EI} \cdot X_1 - \frac{3}{2} \cdot \varphi = 0 \Rightarrow X_1 \cong 0,587 \frac{EI}{l} \cdot \varphi$$

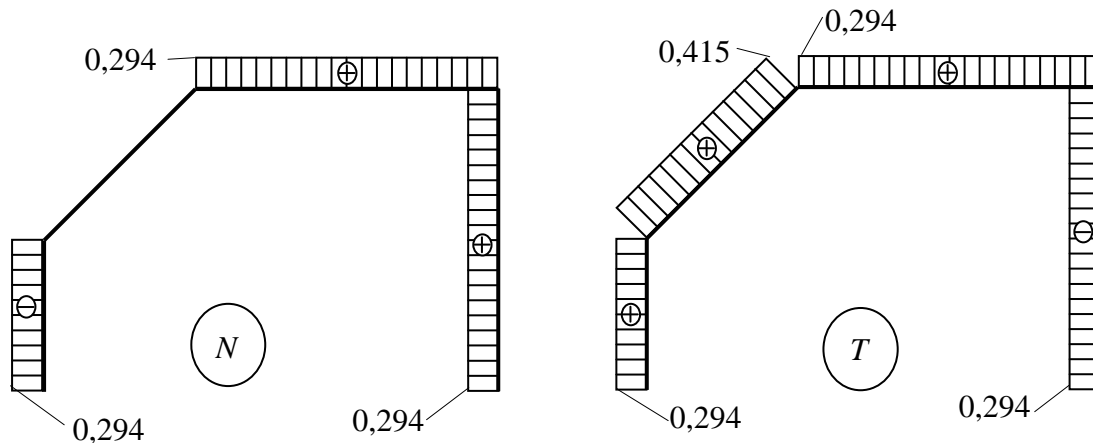
Rzędne wykresów sił przekrojowych wyznaczamy korzystając z zasady superpozycji.

$$N = N_1 \cdot X_1 + N_0 \quad T = T_1 \cdot X_1 + T_0 \quad M = M_1 \cdot X_1 + M_0$$

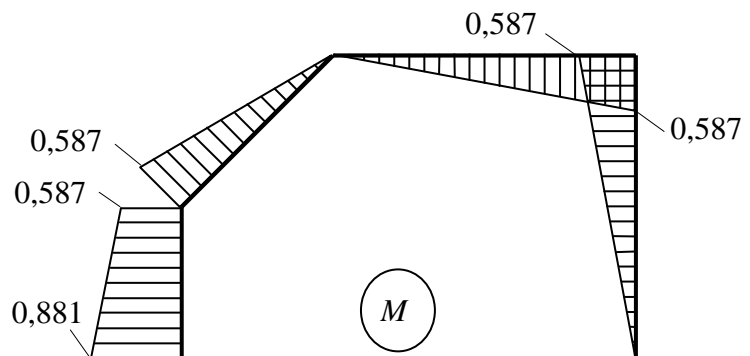
W układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym błędy montażowe nie wywołują powstania sił przekrojowych.

$$N_0 = T_0 = M_0 = 0 \Rightarrow N = N_1 \cdot X_1 \quad T = T_1 \cdot X_1 \quad M = M_1 \cdot X_1.$$

Wykresy sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym



Rzędne wykresu siły normalnej i tnącej mnożymy przez $\frac{EI}{l^2} \cdot \varphi$.



Rzędne wykresu momentu gnącego mnożymy przez $\frac{EI}{l} \cdot \varphi$.

Rys. 14