Wprowadzenie

Wykresy sił przekrojowych są niezbędne w projektowaniu konstrukcji prętowych. Na ich podstawie określamy kształt i wymiary przekrojów poprzecznych prętów (korzystając z warunku wytrzymałości). W układach statycznie niewyznaczalnych nie dysponujemy wystarczającą ilością równań równowagi do wyznaczenia sił przekrojowych, a w przypadku układów zewnętrznie statycznie niewyznaczalnych również reakcji podporowych. Jedną z metod rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych (układów o nadliczbowych więzach) jest metoda sił. W układach rozwiązywanych tą metodą niewiadomymi są siły uogólnione, a równania, z których wyznaczamy je, są związkami geometrycznymi. Sposób rozwiązywania układu statycznie niewyznaczalnego metodą sił jest następujący:

- Określenie stopnia statycznej niewyznaczalności układu *n*.

  W przypadku ramy płaskiej, w której pręty nie tworzą układów zamkniętych, korzystamy ze wzoru

$$n = r - p - 3$$

gdzie:

r - liczba składowych reakcji podpór,
p - liczba połączeń między podukładami (przegubów, teleskopów i tulei).

Z kolei dla ramy płaskiej, w której pręty lub część prętów tworzy układ zamknięty bądź układy zamknięte, stosujemy wzór

$$n = r + 3 \cdot z - p - 3$$

gdzie:

r - liczba składowych reakcji podpór,
z - liczba zamkniętych układów,
p - liczba połączeń między podukładami (przegubów, teleskopów i tulei).

- Utworzenie układu podstawowego.

W rozwiązywanym układzie likwidujemy *n* nadliczbowych więzów, tworząc w ten sposób układ podstawowy (statycznie wyznaczalny i tym samym geometrycznie niezmienny).

- Obciążenie układu podstawowego.

Układ podstawowy jest pod względem statycznym równoważny rozpatrywanemu układowi statycznie niewyznaczalnemu, jeżeli poza obciążeniem zewnętrznym działającym na układ, w miejscach usuniętych więzów wprowadzimy nadliczbowe $X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_{n-1}, X_n$ - reakcje usuniętych więzów (siłę w miejscu, w którym więz blokuje przesunięcie, natomiast moment w miejscu, w którym więz blokuje obrót).

- Wyznaczenie współczynników przy niewiadomych (nadliczbowych) i wyrazów wolnych układu równań kanonicznych metody sił.

Układ podstawowy jest pod względem kinematycznym równoważny rozpatrywanemu układowi statycznie niewyznaczalnemu, jeżeli pod wpływem obciążenia zewnętrznego oraz niewiadomych nadliczbowych $X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_{n-1}, X_n$ przemieszczenia uogólnione w układzie podstawowym w miejscach zlikwidowanych *n* więzów są równe zeru. Przyjmijmy założenie, że rozpatrywana konstrukcja wykonana jest z materiału liniowo-sprężystego. Korzystając z zasady superpozycji otrzymamy następujący układ n równań z n niewiadomymi:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1i} & \ldots & \delta_{1n-1} & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{2i} & \ldots & \delta_{2n-1} & \delta_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \ldots & \delta_{ii} & \ldots & \delta_{in-1} & \delta_{in} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \delta_{n-11} & \delta_{n-12} & \ldots & \delta_{n-1i} & \ldots & \delta_{n-1n-1} & \delta_{n-1n} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{ni} & \ldots & \delta_{nn-1} & \delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_i \\ \ldots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \ldots \\ \delta_{i0} \\ \ldots \\ \delta_{n-10} \\ \delta_{n0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

gdzie:

δ_{jk} - przemieszczenie uogólnione odpowiadające nadliczbowej X_j wywołane działaniem nadliczbowej $X_k = 1$,

δ_{j0} - przemieszczenie uogólnione odpowiadające nadliczbowej X_j wywołane działaniem obciążenia zewnętrznego.

Załóżmy, że rozpatrywana konstrukcja jest układem ramowym złożonym z prętów smukłych (stosunek wysokości przekroju poprzecznego pręta do jego długości $\frac{h}{l} \le \frac{1}{10}$). Możemy wówczas pominąć wpływ sił poprzecznych na wielkość przemieszczeń. Wpływ sił podłużnych działających w prętach zginanych na wielkość przemieszczeń jako mały też można pominąć. Przyjmijmy również, że podpory są niepodatne oraz, że na układ nie działa obciążenie termiczne oraz nie występują w konstrukcji błędy montażowe. Korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra otrzymujemy

$$\delta_{jk} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_j M_k}{E_i I_i} \mathrm{d}s$$

$$\delta_{j0} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_j M_0}{E_i I_i} \mathrm{d}s$$

gdzie:

M_j - moment zginający wywołany działaniem nadliczbowej $X_j = 1$,

M_k - moment zginający wywołany działaniem nadliczbowej $X_k = 1$,

M_0 - moment zginający wywołany działaniem obciążenia zewnętrznego,

$E_i I_i$ - sztywność zginania i-tego pręta.

Z twierdzenia o wzajemności przemieszczeń wynika, że

$$\delta_{jk} = \delta_{kj}.$$

Oznacza to, że macierz układu równań metody sił (macierz podatności) jest symetryczna. Nie zależy ona od obciążenia układu.

W przypadku, gdy konstrukcja składa się z prętów zginanych oraz z prętów dwuprzegubowych, w których nie działają momenty gnące i siły poprzeczne (rama ze skratowaniem), to wpływ sił normalnych na wielkość przemieszczeń uwzględniamy jedynie w prętach dwuprzegubowych, natomiast w prętach zginanych wpływ ten jako mały można pominąć (uwaga ta dotyczy drugiego składnika prawej strony poniższych wzorów). Wzór Maxwella-Mohra ma postać

$$\delta_{jk} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_j M_k}{E_i I_i} \mathrm{d}s + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_j N_k}{E_i A_i} \mathrm{d}s$$

$$\delta_{j0} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_j M_0}{E_i I_i} \mathrm{d}s + \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_j N_0}{E_i A_i} \mathrm{d}s$$

gdzie:

N_j - siła podłużna wywołana działaniem nadliczbowej $X_j = 1$,

N_k - siła podłużna wywołana działaniem nadliczbowej $X_k = 1$,

N_0 - siła podłużna wywołana działaniem obciążenia zewnętrznego,

$E_i A_i$ - sztywność ściskania *i*-tego pręta, na którego końcach znajdują się przeguby.

W przypadku, gdy na rozpatrywaną ramę działa dodatkowo obciążenie termiczne (o równomiernym rozkładzie temperatury w przekroju poprzecznym pręta) oraz w konstrukcji występują błędy montażowe, wyrazy wolne układu równań wyznacza się zgodnie z poniższym wzorem

$$\delta_{j0} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{M_j M_0}{E_i I_i} \mathrm{d}s + \sum_i \int_0^{l_i} N_{ij} \left(\frac{N_{i0}}{E_i A_i} + \alpha_{ti}\, \Delta t_i \right) \mathrm{d}s + \sum_i N_{ij} \cdot \Delta l_i - \sum_m R_{mj} \cdot \Delta_m$$

gdzie:

α_{ti} …- współczynnik rozszerzalności termicznej *i*-tego pręta,

Δt_i - przyrost temperatury *i*-tego pręta (różnica temperatury użytkowania i temperatury montażu konstrukcji),

R_{mj} - reakcja *m*-tej podpory wywołana działaniem nadliczbowej $X_j = 1$,

Δ_m - błąd montażowy *m*-tej podpory,

N_{ij} - siła podłużna w *i*-tym pręcie wywołana działaniem nadliczbowej $X_j = 1$,

N_{i0} - siła podłużna w *i*-tym pręcie wywołana działaniem obciążenia zewnętrznego

Δl_i - błąd montażowy *i*-tego pręta.

Wartość całek δ_{jk} oraz δ_{j0} możemy wyznaczać korzystając ze wzoru Wereszczagina. W tym celu należy sporządzić wykresy sił przekrojowych w układzie podstawowym obciążonym kolejno siłami uogólnionymi $X_1 = 1,\ X_2 = 1, ..., X_i = 1,..., X_{n-1},\ X_n = 1$ oraz obciążeniem zewnętrznym.

- Wyznaczenie sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym.

Po rozwiązaniu układu równań metody sił możemy wyznaczyć siły przekrojowe

$$N = N_1 \cdot X_1 + N_2 \cdot X_2 + ... + N_i \cdot X_i + ... + N_n \cdot X_n + N_n \cdot X_n + N_0$$

$$T = T_1 \cdot X_1 + T_2 \cdot X_2 + ... + T_i \cdot X_i + ... + T_{n-1} \cdot X_{n-1} + T_n \cdot X_n + T_0$$

$$M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + ... + M_i \cdot X_i + ... + M_{n-1} \cdot X_{n-1} + M_n \cdot X_n + M_0$$

gdzie:

N, T, M - siły przekrojowe w układzie statycznie niewyznaczalnym,

N_i, T_i, M_i - siły przekrojowe w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym od obciążenia nadliczbową $X_i = 1$,

N_0, T_0, M_0 - siły przekrojowe w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym od obciążenia zewnętrznego,

$X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_{n-1}, X_n$ - wartości nadliczbowych otrzymane z rozwiązania układu równań metody sił.

Konstrukcja pod wpływem obciążenia odkształca się, a jej punkty doznają przemieszczeń liniowych i kątowych. Umiejętność wyznaczania tych przemieszczeń jest konieczna przy sprawdzaniu warunku sztywności (przemieszczenia nie mogą przekraczać wartości dopuszczalnych, określonych w normie stosownej do rodzaju konstrukcji). W celu wyznaczenia przemieszczenia możemy skorzystać ze wzoru Maxwella-Mohra. W przypadku ram ze skratowaniem uwzględniamy wpływ sił normalnych wyłącznie w prętach dwuprzegubowych, w których nie działają momenty gnące i siły poprzeczne. Wzór ma postać

$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}\ M}{E_i I_i} \mathrm{ds} + \sum_j \int_0^{l_j} \frac{\overline{N}\ N}{E_j A_j} \mathrm{ds} + \sum_j \int_0^{l_j} \overline{N}_j\ \alpha_t\ \Delta t_j\ \mathrm{ds} + \sum_j \overline{N}_j \cdot \Delta l_j - \sum_k \overline{R}_k \cdot \Delta_k$$

W przypadku ram bez skratowania wpływ sił normalnych działających w prętach zginanych na wielkość przemieszczeń jako mały można pominąć. Wówczas wzór ma postać

$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}\ M}{E_i I_i} \mathrm{ds} + \sum_j \int_0^{l_j} \overline{N}_j\ \alpha_t\ \Delta t_j\ \mathrm{ds} + \sum_j \overline{N}_j \cdot \Delta l_j - \sum_k \overline{R}_k \cdot \Delta_k$$

W powyższych wzorach przyjęto oznaczenia:

M, N - siły przekrojowe (momenty gnące i siły normalne) wywołane działaniem obciążenia rzeczywistego w układzie statycznie niewyznaczalnym,

$\overline{M}$, $\overline{N}$ - siły przekrojowe (momenty gnące i siły normalne) wywołane działaniem obciążenia wirtualnego w postaci jednostkowej siły uogólnionej w układzie statycznie niewyznaczalnym,

$E_i I_i$ - sztywność zginania *i*-tego pręta,

$E_j A_j$ - sztywność ściskania *j*-tego pręta.

Wyznaczanie przemieszczeń w układach statycznie niewyznaczalnych możemy znacznie uprościć wykorzystując twierdzenia redukcyjne. W myśl pierwszego twierdzenia redukcyjnego siły przekrojowe od obciążenia wirtualnego możemy wyznaczyć w dowolnym układzie statycznie wyznaczalnym, otrzymanym poprzez likwidację nadliczbowych więzów rozważanego układu statycznie niewyznaczalnego. Wzór na przemieszczenie ma postać:
dla ram ze skratowaniem

$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}^{(0)}\, M}{E_i I_i} \mathrm{ds} + \sum_j \int_0^{l_j} \frac{\overline{N}^{(0)}\, N}{E_j A_j} \mathrm{ds} + \sum_j \int_0^{l_j} \overline{N}_j^{(0)}\, \alpha_t\, \Delta t_j\, \mathrm{ds} + \sum_j \overline{N}_j^{(0)} \cdot \Delta l_j - \sum_k \overline{R}_k^{(0)} \cdot \Delta_k$$

dla ram bez skratowania

$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}^{(0)}\, M}{E_i I_i} \mathrm{ds} + \sum_j \int_0^{l_j} \overline{N}_j^{(0)}\, \alpha_t\, \Delta t_j\, \mathrm{ds} + \sum_j \overline{N}_j^{(0)} \cdot \Delta l_j - \sum_k \overline{R}_k^{(0)} \cdot \Delta_k$$

gdzie:

M, N - siły przekrojowe (momenty gnące i siły normalne) wywołane działaniem obciążenia rzeczywistego w układzie statycznie niewyznaczalnym,

$\overline{M}^{(0)}, \overline{N}^{(0)}$ - siły przekrojowe (momenty gnące i siły podłużne) wywołane działaniem obciążenia wirtualnego w postaci jednostkowej siły uogólnionej w układzie statycznie wyznaczalnym,

$\overline{R}_k^{(0)}$ - reakcje podporowe wywołane działaniem obciążenia wirtualnego w postaci jednostkowej siły uogólnionej w układzie statycznie wyznaczalnym.

W myśl drugiego twierdzenia redukcyjnego siły przekrojowe od obciążenia zewnętrznego możemy wyznaczyć w dowolnym układzie statycznie wyznaczalnym, otrzymanym poprzez likwidację nadliczbowych więzów rozważanego układu statycznie niewyznaczalnego, natomiast obciążeniem wirtualnym obciążamy układ statycznie niewyznaczalny. Wzór na przemieszczenie ma postać:
dla ram ze skratowaniem

$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}\, M^{(0)}}{E_i I_i} \mathrm{ds} + \sum_j \int_0^{l_j} \frac{\overline{N}\, N^{(0)}}{E_j A_j} \mathrm{ds} + \sum_j \int_0^{l_j} \overline{N}\, \alpha_t\, \Delta t_j\, \mathrm{ds} + \sum_j \overline{N} \cdot \Delta l_j - \sum_k \overline{R}_k \cdot \Delta_k$$

dla ram bez skratowania

$$\delta = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}\, M^{(0)}}{E_i I_i} \mathrm{ds} + \sum_j \int_0^{l_j} \overline{N}_j\, \alpha_t\, \Delta t_j\, \mathrm{ds} + \sum_j \overline{N}_j \cdot \Delta l_j - \sum_k \overline{R}_k \cdot \Delta_k$$

gdzie:

$M^{(0)}$, $N^{(0)}$ - siły przekrojowe (momenty gnące i siły podłużne) wywołane działaniem obciążenia rzeczywistego w układzie statycznie wyznaczalnym,

$\overline{M}$, $\overline{N}$ - siły przekrojowe (momenty gnące i siły podłużne) wywołane działaniem obciążenia wirtualnego w postaci jednostkowej siły uogólnionej w układzie statycznie niewyznaczalnym,

$\overline{R}_k$ - reakcje podporowe wywołane działaniem obciążenia wirtualnego w postaci jednostkowej siły uogólnionej w układzie statycznie niewyznaczalnym.

W związku z koniecznością sporządzenia wykresów sił przekrojowych od obciążenia zewnętrznego w układzie statycznie niewyznaczalnym w celu zaprojektowania przekrojów poprzecznych prętów, częściej wykorzystywane jest pierwsze twierdzenie redukcyjne.